

ГЕОКРИОЛОГИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ И ПРОГНОЗ

УДК 551.345

ГИДРОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИКИ  
ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ В ПОЧВЕННОМ ПРОФИЛЕ (*Часть 1*)

**Ю.Б. Виноградов**, **О.М. Семенова**<sup>1,2,3</sup>, **Т.А. Виноградова**<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Государственный гидрологический институт, 199053, Санкт-Петербург, В.О., 2-я линия, 23, Россия

<sup>2</sup>НПО "Гидротехпроект", 194223, Санкт-Петербург, пр. Тореца, 44, корп. 2, Россия

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
199178, Санкт-Петербург, В.О., 10-я линия, 33-35, Россия; [omakarjeva@gmail.com](mailto:omakarjeva@gmail.com)

Предложен метод моделирования динамики тепла в почве, интегрированный в детерминированную гидрологическую модель "Гидрограф". Метод основан на нескольких приемах, упрощающих дифференциальное уравнение теплопроводности в почвенном профиле и позволяющих привести систему дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений без потери качества результатов расчета. Подробно описаны подходы к определению коэффициентов теплопроводности и теплообмена расчетных слоев почвы в условиях промерзания–оттаивания и переменной влажности. В качестве параметров модели используются физические свойства материалов, слагающих почвенный профиль, такие как плотность, пористость, удельная теплопроводность и теплоемкость, максимальная водоудерживающая способность. На основе данных наблюдений эти свойства могут быть обобщены и систематизированы для почвенных профилей основных ландшафтов и использованы на водосборах со схожими условиями формирования стока без применения методов калибровки. Результаты расчета температуры на глубинах 20, 40, 80 и 160 см на одном из объектов Колымской водно-балансовой станции подтверждают эффективность предлагаемого метода.

*Уравнение теплопроводности, многолетняя мерзлота, гидрологическое моделирование, температура почвенного профиля, Колымская водно-балансовая станция*

HYDROLOGICAL MODELLING: THE APPROACH TO SIMULATION  
OF HEAT DYNAMICS IN SOIL PROFILE (*Part 1*)

**Yu.B. Vinogradov**, **O.M. Semenova**<sup>1,2,3</sup>, **T.A. Vinogradova**<sup>3</sup>

<sup>1</sup>State Hydrological Institute, 199053, St. Petersburg, V.O., 2nd Line, 23, Russia

<sup>2</sup>Gidrotehproekt Ltd, 194223, St. Petersburg, pr. Toreza, 44-2, Russia

<sup>3</sup>St. Petersburg State University, 199178, St. Petersburg, V.O., 10th Line, 33-35, Russia; [omakarjeva@gmail.com](mailto:omakarjeva@gmail.com)

This paper proposes a method for modelling heat dynamics in soil, which is integrated into deterministic hydrological model "Hydrograph". The method is based on several techniques that simplify the differential equation of heat transfer in soil profile and results in conversion of the system of differential equations to a system of linear algebraic equations without loss of quality of modelling results. Also the approaches used to estimate thermal conductivity and heat transfer of calculated soil layers in the conditions of soil freezing–thawing and variable humidity are described in detail. Physical properties of the materials composing the soil profile, such as density, porosity, thermal conductivity and thermal capacity, the maximum water holding capacity, are used as the model parameters. On the basis of observational data such properties can be generalized and systematized for soil profiles characteristic of major landscapes and used in catchments with similar conditions of runoff formation without the use of calibration methods. Modelling results of soil temperature at depths of 20, 40, 80 and 160 cm at one of the objects of the Kolyma water balance station confirm the effectiveness of the proposed method.

*Equation of heat conductivity, permafrost, hydrological modelling, temperature of soil profile, Kolyma water-balance station*

ВВЕДЕНИЕ

Освоение территорий Сибири и Крайнего Севера, расположенных в зоне распространения многолетней мерзлоты, требует решения как практи-

ческих инженерно-исследовательских задач оценки гидрологических характеристик стока в условиях слабой изученности, так и прогнозов возможных

трансформаций гидрологического режима под влиянием изменений климата и антропогенного воздействия в будущем.

Динамика формирования деятельного слоя является одним из основных факторов, определяющих характер протекания гидрологических процессов [Кучмент и др., 2000; Гусев, 2010; Zhang et al., 2000]. Поэтому моделирование процесса формирования стока должно проводиться с учетом энергетического баланса не только поверхности водосборов, но и толщи почвогрунтов, подверженных сезонному изменению вследствие протаивания и промерзания.

Необходимость моделирования таких процессов, как фильтрация воды в мерзлые грунты, водообмен между поверхностными и подземными водами, сезонное перераспределение стока за счет замерзания в почвогрунтах жидких осадков или талой воды, ставит задачу непрерывного расчета переменных состояний почвенного профиля (температуры, влажности и льдистости) на разных глубинах в каждый расчетный интервал времени (РИВ).

Методы моделирования динамики тепла в почве должны учитывать условия формирования деятельного слоя в различных ландшафтах и в то же время не зависеть от калибровки параметров моделей в каждом конкретном случае [Виноградов, 2010; Pomeroy et al., 2007; Semanova, 2010; Vinogradov et al., 2011]. Важно также, чтобы моделирование могло проводиться в условиях дефицита данных наблюдений, характерного для большей части арктических территорий как России, так и мира [Semanova, Vinogradova, 2009].

Для описания процессов теплообмена в почве в гидрологических моделях используется несколько подходов. Здесь не будем останавливаться на упрощенных методах, когда процессы промерзания и оттаивания почвы представлены в моделях неявным образом, например, эмпирическими соотношениями между глубиной протаивания и температурой воздуха [Nelson et al., 1997] или зависимостями гидрофизических характеристик почвы от разных факторов [Pomeroy et al., 2007].

Одним из наиболее распространенных методов расчета динамики тепловой энергии в почве в целях гидрологического моделирования является численное решение уравнения теплопроводности [Кучмент и др., 2000]. Для этого используются методы конечных разностей и конечных элементов. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $\theta$  – температура почвы, °С;  $t$  – время, с;  $x$  – вертикальная координата, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·°С);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг·°С).

Уравнение (1) описывает только процессы теплопроводности в грунте без учета затрат тепла на фазовые превращения и приток тепла извне (например, с фильтрующейся влагой). Л. Гудрих [Goodrich, 1978] разработал численный метод решения одномерной задачи теплообмена в почвенной колонке с учетом фазовых переходов, позволяющий непрерывно определять границу раздела фаз. Этот метод нашел широкое применение в последующих исследованиях [Аржанов и др., 2007].

Очевидно, что реализация численных методов требует значительных затрат машинного времени. В связи с этим многие исследователи либо рассматривают методы упрощения расчетных схем и повышения их устойчивости [Bowling et al., 2008], либо предлагают упрощенные подходы к решению уравнения теплопроводности для промерзающей–оттаивающей почвы [Гусев, 2010].

В настоящей работе представлен метод расчета динамики тепла в почве, основанный на нескольких приемах, упрощающих дифференциальное уравнение теплопроводности в почвенном профиле и позволяющих привести систему дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений без потери качества результатов расчета. Предлагаются способы расчета коэффициентов теплопроводности и теплообмена расчетных слоев почвы и снежного покрова, находящихся в различных переменных состояниях. Описанные алгоритмы разработаны для целей гидрологического моделирования и интегрированы в детерминированную гидрологическую модель “Гидрограф” [Виноградов, 1988, 2010]. В качестве параметров модели используются физические свойства почвенного профиля. Эффективность предложенного метода подтверждена результатами расчета температуры на глубинах 20, 40, 80 и 160 см метеорологической площадки “Нижняя” на территории Колымской водно-балансовой станции (КВБС).

#### МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛОВОЙ ДИНАМИКИ В ПОЧВЕННОМ ПРОФИЛЕ

В общем случае почвенный профиль представляет собой среду, состоящую из талых и мерзлых прослоек. Границы раздела фаз могут перемещаться, исчезать и появляться в зависимости от сезона. Непостоянство числа уравнений в системе (1) существенно осложняет вычислительный процесс.

Учитывая это, а также необходимость многократного решения уравнения во многих точках речного бассейна и для большого числа расчетных интервалов времени, приводящую к чрезмерной и неоправданной перегрузке вычислительного процесса, здесь предложен иной, напрямую связанный с содержанием уравнения (1), подход к решению поставленной задачи.

При решении системы уравнений теплопроводности численными методами пространственный шаг  $\Delta x$  определяет расстояния между точками, в которых вычисляются значения непрерывного профиля температуры. В предлагаемом методе этот шаг является интервалом осреднения и вместо непрерывной кривой имеет место ступенчатая гистограмма распределения температуры почвы по глубине. Рассчитанную температуру можно относить к середине расчетного слоя почвы (РСП) или снежного покрова.

Исходя из предположения о том, что удельные тепловые потоки  $q_{i-1,i}$  из одного РСП в другой пропорциональны разности значений их температур, а в качестве коэффициентов пропорциональности выступают коэффициенты теплообмена между почвой (снежным покровом) и атмосферой ( $\psi$ ) и между соседними слоями почвы ( $\xi$ , Вт/(м<sup>2</sup>·°С)), запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для  $n$  расчетных слоев почвенного профиля:

$$dU_1/dt = \psi(\eta - \theta_1) - \xi_{12}(\theta_1 - \theta_2),$$

$$dU_i/dt = \xi_{i-1,i}(\theta_{i-1} - \theta_i) - \xi_{i,i+1}(\theta_i - \theta_{i+1}), \quad (2)$$

$$dU_n/dt = \xi_{n-1,n}(\theta_{n-1} - \theta_n) - \xi_{gr}(\theta_n - \theta_{gr}).$$

Здесь  $U_i$  – количество тепла, содержащееся в  $i$ -м РСП, Дж;  $\eta$ ,  $\theta_i$  – температура воздуха и РСП, °С;  $\xi_{i-1,i}$ ,  $\xi_{gr}$  – коэффициенты теплообмена между соседними РСП и на нижней границе нижнего расчетного слоя почвы, Вт/(м<sup>2</sup>·°С);  $\psi$  – коэффициент теплообмена между атмосферой и верхним расчетным слоем почвы или снежным покровом, Вт/(м<sup>2</sup>·°С). Температуру на нижней границе нижнего РСП ( $\theta_{gr}$ , °С) определим соотношением

$$\theta_{gr} = k_1\theta_c + (1 - k_1)\theta_n,$$

где  $\theta_c$  – температура на постоянной глубине  $x_c > x_n$  ( $x_n$  – глубина нижнего РСП). В зависимости от глубины  $x_c$  значение  $\theta_c$  может быть принято постоянным либо эта величина аппроксимируется выражением вида

$$\theta_c = \bar{\theta}_c + M \sin(2\pi t/T + Am), \quad (3)$$

где  $M$  – амплитуда величины  $\theta_c$ ;  $T$  – период (365 сут);  $Am$  – начальная фаза при  $t_0 = 0$ . Параметр  $k_1$  оценивается линейной интерполяцией

$$k_1 = 0,5\Delta x_n / (x_c - x_{gr}) \quad (4)$$

или минимизацией расхождений рассчитанных и измеренных значений температур на глубине  $x_n$ . Здесь  $\Delta x_n$  – толщина нижнего расчетного слоя почвы, м;  $x_c$  – глубина, на которой ход температуры почвы принят за климатическую норму, м;  $x_{gr}$  – глубина нижней границы нижнего РСП, м.

Коэффициент теплообмена между верхним слоем почвы или снежным покровом и атмосфе-

рой отражает влияние не только конвективного теплообмена между поверхностью твердого тела и приземным слоем атмосферы, но и других факторов помимо температуры воздуха.

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений при небольшом количестве РСП (например, при  $n = 10$ ) принципиальных затруднений не вызывает. Проинтегрировать систему (2) можно только численно, поэтому предлагается несколько приемов, позволяющих привести систему дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений.

Практически во всех гидрологических моделях температура воздуха  $\eta$  используется в качестве входной информации и принимается постоянной в течение расчетного интервала времени. Отнесем это условие не только к атмосфере, но и к нижележащему РСП. Предположим, что каждый РСП сверху и снизу контактирует со средой, которая в течение РИВ  $\Delta t$  условно имеет постоянную температуру.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$dU_1/dt = \psi(\bar{\eta} - \theta_1) - \xi_{12}(\theta_1 - \bar{\theta}_2),$$

$$dU_i/dt = \xi_{i-1,i}(\bar{\theta}_{i-1} - \theta_i) - \xi_{i,i+1}(\theta_i - \bar{\theta}_{i+1}),$$

$$dU_n/dt = \xi_{n-1,n}(\bar{\theta}_{n-1} - \theta_n) - k_1\xi_{gr}(\theta_n - \bar{\theta}_{gr})$$

и представим ее в виде

$$dU_1/dt = \psi\bar{\eta} - (\psi + \xi_{12})\theta_1 + \xi_{12}\bar{\theta}_2,$$

$$dU_i/dt = \xi_{i-1,i}\bar{\theta}_{i-1} - (\xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1})\theta_i + \xi_{i,i+1}\bar{\theta}_{i+1}, \quad (5)$$

$$dU_n/dt = \xi_{n-1,n}\bar{\theta}_{n-1} - (\xi_{n-1,n} + k_1\xi_{gr})\theta_n + k_1\xi_{gr}\bar{\theta}_{gr}.$$

Количество тепла ( $U_i$ , Дж), содержащееся в  $i$ -м РСП, составит

$$U_i = c\rho\Delta x\theta, \quad (6)$$

где  $x$  – вертикальная координата, м;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг·°С) рассматриваемого слоя. В соответствии с выражением (6) заменим в системе (5) температуру РСП количеством тепловой энергии:

$$\frac{dU_1}{dt} = \psi\bar{\eta} - \frac{\psi + \xi_{12}}{c_1\rho_1\Delta x_1}U_1 + \frac{\xi_{12}}{c_2\rho_2\Delta x_2}\bar{U}_2,$$

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{\xi_{i-1,i}}{c_{i-1}\rho_{i-1}\Delta x_{i-1}}\bar{U}_{i-1} -$$

$$- \frac{\xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1}}{c_i\rho_i\Delta x_i}U_i + \frac{\xi_{i,i+1}}{c_{i+1}\rho_{i+1}\Delta x_{i+1}}\bar{U}_{i+1}, \quad (7)$$

$$\frac{dU_n}{dt} = \frac{\xi_{n-1,n}}{c_{n-1}\rho_{n-1}\Delta x_{n-1}}\bar{U}_{n-1} - \frac{\xi_{n-1,n} + k_1\xi_{gr}}{c_n\rho_n\Delta x_n}U_n + k_1\xi_{gr}\bar{\theta}_{gr}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= \psi \bar{\eta}, \quad B_1 = \frac{\psi + \xi_{12}}{c_1 \rho_1 \Delta x_1}, \quad D_1 = \frac{\xi_{12}}{c_2 \rho_2 \Delta x_2} \bar{U}_2, \\ A_i &= \frac{\xi_{i-1,i}}{c_{i-1} \rho_{i-1} \Delta x_{i-1}} \bar{U}_{i-1}, \quad B_i = \frac{\xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1}}{c_i \rho_i \Delta x_i}, \\ C_i &= \frac{\xi_{i,i+1}}{c_{i+1} \rho_{i+1} \Delta x_{i+1}} \bar{U}_{i+1}, \\ A_n &= \frac{\xi_{n-1,n}}{c_{n-1} \rho_{n-1} \Delta x_{n-1}} \bar{U}_{n-1}, \quad B_n = \frac{\xi_{n-1,n} + k_1 \xi_{gr}}{c_n \rho_n \Delta x_n}, \\ D_n &= k_1 \xi_{gr} \theta_{gr} \end{aligned} \quad (8)$$

и преобразуем систему уравнений (7) для любого РСП следующим образом:

$$\begin{aligned} dU/(A - BU + D) &= dt, \\ \int_{U_0}^{U^*} \left[ \frac{dU}{A - BU + D} \right] &= \int_{t_0}^t dt, \\ U^* &= [1 - \exp(-B\Delta t)] \frac{A+D}{B} + U_0 \exp(-B\Delta t), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $U_0, U^*$  – значения количества тепловой энергии РСП в начальный момент  $t_0$  и момент времени  $t$ , Дж;  $\Delta t$  – расчетный интервал времени, с.

Система (9) могла бы служить основой для расчетов только при отсутствии фазовых переходов. При промерзании–оттаивании отдельные РСП продолжают потреблять или расходовать тепловую энергию, сохраняя постоянным значение  $U^* = 0$ , а число их может меняться.

Заменим выражение (9) на более удобное уравнение

$$\Delta U = [1 - \exp(-B\Delta t)] [(A+D)/B - U_0], \quad (10)$$

где  $\Delta t = U^* - U_0$  определяет затраты энергии на изменение температуры, фазовые переходы или представляет собой сумму двух процессов. Такой подход позволяет обеспечить постоянство количества уравнений в расчетной системе, изменяя в случае фазовых переходов лишь ее коэффициенты. Значения  $\bar{U}$  в системах (7) и (8) назовем эффективными средними, занимающими промежуточное между  $U^*$  и  $U_0$  положение, и определим как

$$\bar{U} = U_0 + k_2 \Delta U,$$

где  $0 < k_2 < 1$ . Для оценки значения весового коэффициента  $k_2$  в зависимости от РИВ ( $\Delta t$ , с) используется выражение, разработанное А.С. Литвиным [1991] на основе результатов численных экспериментов с различными РИВ при решении простых тестовых задач

$$k_2 = 1 - 0,5 \exp(-10^{-5} \Delta t).$$

Для РИВ, равного суткам, значение  $k_2$  составляет 0,79.

Коэффициенты системы (8) в соответствии с решением (10) объединяем в систему параметрических комплексов:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 - \exp[-(\psi + \xi_{12}) \Delta t / (c_1 \rho_1 \Delta x_1)], \\ N_1 &= R_1 \bar{\eta} \psi c_1 \rho_1 \Delta x_1 / (\psi + \xi_{12}), \\ M_1 &= k_2 R_1 \xi_{12} c_1 \rho_1 \Delta x_1 / [(\psi + \xi_{12}) c_2 \rho_2 \Delta x_2], \\ L_1 &= M_1 (U_2)_0 / k_2 - R_1 (U_1)_0, \\ R_i &= 1 - \exp[-(\xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1}) \Delta t / (c_i \rho_i \Delta x_i)], \\ N_i &= k_2 R_i \xi_{i-1,i} c_i \rho_i \Delta x_i / [(\xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1}) c_{i-1} \rho_{i-1} \Delta x_{i-1}], \\ M_i &= k_2 R_i \xi_{i,i+1} c_i \rho_i \Delta x_i / [(\xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1}) c_{i+1} \rho_{i+1} \Delta x_{i+1}], \\ L_i &= [N_i (U_{i-1})_0 + M_i (U_{i+1})_0] / k_2 - R_i (U_i)_0, \\ R_n &= 1 - \exp[-(\xi_{n-1,n} + k_1 \xi_{gr}) \Delta t / (c_n \rho_n \Delta x_n)], \\ N_n &= k_2 R_n \xi_{n-1,n} c_n \rho_n \Delta x_n / [(\xi_{n-1,n} + k_1 \xi_{gr}) c_{n-1} \rho_{n-1} \Delta x_{n-1}], \\ M_n &= R_n \theta_c k_1 \xi_{gr} c_n \rho_n \Delta x_n / (\xi_{n-1,n} + k_1 \xi_{gr}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$L_n = N_n (U_{n-1})_0 / k_2 - R_n (U_n)_0,$$

которые являются коэффициентами системы линейных алгебраических уравнений

$$\Delta U_1 = N_1 + M_1 \Delta U_1 + L_1,$$

$$\Delta U_i = N_i + M_i \Delta U_{i-1} + M_i \Delta U_{i+1} + L_i, \quad (12)$$

$$\Delta U_n = N_n \Delta U_{n-1} + M_n + L_n.$$

Матрица данной системы является ленточной трехдиагональной, что значительно облегчает вычисления.

Если в рассматриваемом или соседних РСП происходят фазовые превращения, то запас тепла в них равен нулю, отсюда следуют некоторые упрощения. При фазовых превращениях в верхнем ( $i-1$ )-м РСП (для самого верхнего РСП этот случай отождествляется с  $\bar{\eta} = 0$ ) системы (11) и (12) упрощаются:

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= M_i \Delta U_{i+1} + L_i, \\ L_i &= M_i (U_{i+1})_0 / k_2 - R_i (U_i)_0, \end{aligned} \quad (13)$$

а в случае фазовых превращений в нижнем ( $i+1$ )-м РСП –

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= N_i \Delta U_{i-1} + L_i, \\ L_i &= N_i (U_{i-1})_0 / k_2 - R_i (U_i)_0. \end{aligned} \quad (14)$$

При фазовых превращениях одновременно в верхнем и нижнем РСП:

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= L_i, \\ L_i &= -R_i (U_i)_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Фазовые превращения только в  $i$ -м рассматриваемом РСП описываются системой коэффициентов

$$\begin{aligned} N_1 &= \bar{\eta} \psi \Delta t, \quad M_1 = k_2 \xi_{12} \Delta t / (c_2 \rho_2 \Delta x_2), \\ L_1 &= M_1 (U_2)_0 / k_2, \\ N_i &= k_2 \xi_{i-1,i} \Delta t / (c_{i-1} \rho_{i-1} \Delta x_{i-1}), \\ M_i &= k_2 \xi_{i,i+1} \Delta t / (c_{i+1} \rho_{i+1} \Delta x_{i+1}), \quad (16) \\ L_i &= [N_i (U_{i-1})_0 + M_i (U_{i+1})_0] / k_2, \\ N_n &= k_2 \xi_{n-1,n} \Delta t / (c_{n-1} \rho_{n-1} \Delta x_{n-1}), \quad M_n = k_1 \xi_{gr} \theta_c \Delta t, \\ L_n &= N_n (U_{n-1})_0 / k_2. \end{aligned}$$

При фазовых превращениях одновременно в рассматриваемом и соседних РСП теплообмен между данным и соседним РСП отсутствует:

$$N_i = M_i = L_i = 0. \quad (17)$$

Когда в течение одного и того же расчетного интервала времени ( $\Delta t$ ) происходит изменение температуры РСП, а затем фазовый переход (или наоборот), то предусматривается дробление РИВ  $\Delta t$ . Для малой доли  $\Delta t$  в подобной ситуации оценивается преобладающий процесс, а проигравшим пренебрегается. При наличии снежного покрова верхний РСП заменяется последним с переменной мощностью ( $\Delta x_c$ , м) и соответствующими теплофизическими и водно-физическими свойствами.

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕПЛООБМЕНА РАСЧЕТНЫХ СЛОЕВ ПОЧВЫ И СНЕЖНОГО ПОКРОВА

Для определения коэффициента теплопроводности многофазной дисперсной среды рассмотрим систему, состоящую из твердой и газообразной (воздух) фаз. Будем полагать, что воздух является абсолютным теплоизолятором и его влияние сказывается не только в снижении рабочей части площади поперечного сечения единичной колонки, условно выделенной в среде, но и в искривленности, изломанности и разорванности теплопроводящих путей системы, что приводит к дополнительному снижению коэффициента теплопроводности колонки в целом. Предположим, что коэффициент эффективной теплопроводности  $\lambda_m$  такой системы (т. е. сухой почвы) пропорционален степенной функции относительной доли твердого вещества в системе:

$$\lambda_m = \lambda_0 (1 - \varepsilon)^m, \quad m > 1, \quad (18)$$

где  $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности вещества, Вт/(м·°С);  $\varepsilon$  – пористость вещества, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $m$  – параметр.

Теперь полностью заменим воздух водой. Тогда в процессе теплообмена участвует множество теплопроводящих элементов двух типов, соединенных друг с другом последовательно, параллельно или комбинированно. При последовательном соединении теплопроводящих элементов (индекс слева – 1) приравнивание удельных тепловых потоков приводит к следующему выражению для суммарного коэффициента теплопроводности почвы, где поры полностью заполнены водой  $\lambda_M$ :

$$\begin{aligned} {}^{-1}(\lambda_M) &= \lambda_0 \lambda^* / [\lambda_0 \varepsilon + \lambda^* (1 - \varepsilon)] = \\ &= [(1 - \varepsilon) / \lambda_0 + \varepsilon / \lambda^*]^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\lambda^*$  – коэффициент теплопроводности воды, Вт/(м·°С). При параллельном соединении элементов (индекс слева 1) имеем

$${}^1(\lambda_M) = \lambda_0 (1 - \varepsilon) + \lambda^* \varepsilon. \quad (20)$$

Формулы (19) и (20) представляют собой выражения для вычисления средних взвешенных величин – гармонической и арифметической при соотношении  ${}^{-1}(\lambda_M) \leq {}^1(\lambda_M)$ . В действительности мы имеем нечто промежуточное – сложную комбинацию разного рода соединений. Между гармоническим и арифметическим средними лежит геометрическое  ${}^{-1}(\lambda_M) \leq \lambda_M \leq {}^1(\lambda_M)$ , поэтому выражение для  $\lambda_M$  приобретает вид

$$(\lambda_M) = \lambda_0^{1-\varepsilon} + (\lambda^*)^\varepsilon. \quad (21)$$

Использование выражений (18) и (21) позволяет получить простые интерполяционные оценки коэффициента теплопроводности многофазной среды:

$$\lambda = (\lambda_M - \lambda_m) (\omega)^n + \lambda_m, \quad n < 1, \quad (22)$$

где  $\omega = u/\varepsilon$  – степень заполнения пористого пространства водой или льдом, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $u$  – объемная влажность или льдистость РСП, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>.

Расчетный слой почвы в условиях фазового перехода, несмотря на то, что мы приписали ему осредненные свойства, одинаковые по всему  $\Delta x$ , на самом деле подразделяется минимум на две прослойки, каждая из которых имеет свой коэффициент теплопроводности. Поэтому коэффициент теплопроводности для всего РСП  $\lambda_i$  в условиях фазового перехода определяется как средняя гармоническая величина при относительных весовых коэффициентах долей воды и льда в их общем количестве:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= u_i^* / [\lambda_i^* (u_i^* + u_i^*)] + u_i^* / [\lambda_i^* (u_i^* + u_i^*)], \\ \lambda_i^* &= (\lambda_M^* - \lambda_m) [(u_i^* + u_i^*) / \varepsilon_i]^n + \lambda_m, \\ \lambda_i^* &= (\lambda_M^* - \lambda_m) [(u_i^* + u_i^*) / \varepsilon_i]^n + \lambda_m. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $u_i^*$ ,  $u_i^*$  – объемная влажность и льдистость РСП,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ ;  $\lambda_i^*$ ,  $\lambda_i^*$  – коэффициенты теплопроводности влажного и льдистого РСП,  $\text{Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$ ;  $\lambda_M^*$ ,  $\lambda_M^*$  – коэффициенты теплопроводности РСП, все поры которого заняты водой или льдом,  $\text{Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$ ;  $n$  – параметр.

Значения параметров, рекомендованные авторами, составляют  $m = 2,5$  (уравнение (18)) и  $n = 0,75$  (уравнение (23)). Стандартные значения  $\lambda_0$ , используемые в (18), представлены в табл. 1.

Коэффициенты теплообмена меняются во времени и в пространстве в зависимости от целого ряда факторов, тем не менее принимается допущение о том, что в течение расчетного интервала времени  $\Delta t$  действуют постоянные коэффициенты теплообмена, вычисленные в соответствии с состоянием среды в начальный момент.

Определяя соотношение коэффициентов теплообмена РСП и теплопроводности среды, запишем последовательно выражения для стационарного потока тепла ( $q$ ,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ) между атмосферой и поверхностью почвы, между этой поверхностью и точкой на глубине ( $\Delta x_1/2$ , м) и между атмосферой и этой точкой:

$$q = \alpha(\theta_0 - \eta), \quad q = 2\lambda(\theta - \theta_0)/\Delta x, \quad q = \psi(\theta - \eta), \quad (24)$$

где  $\theta_0$  – температура поверхности почвы,  $^\circ\text{C}$ . Отсюда получаем

$$\psi = 1/[\Delta x/2\lambda + 1/\alpha]. \quad (25)$$

Величину  $\alpha$ ,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$  назовем параметром подвода тепловой энергии к подстилающей поверхности. Ее можно трактовать как коэффициент теплообмена между атмосферой и верхним РСП при  $\lambda \rightarrow \infty$ , т. е. при мгновенном отводе энергии от поверхности контакта. При любом  $\alpha$  значение  $\psi$  не превышает  $2\lambda/\Delta x$ . Это означает, что коэффициент теплообмена  $\psi$  сверху ограничен только возможностями отвода энергии от поверхности в глубину почвенного покрова.

Параметр  $\alpha$  изменяется от 1,0 до 5,0  $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$  в зависимости от климатической зоны и типа растительности (1–2 – суровый холодный климат, 1 → 1,5 → 2: лес–тундра–голая поверхность; 3–4 – умеренный климат, 3 → 4: лес–открытые ландшафты; 5 – теплый климат). Параметр  $\alpha$  требует калибровки на основе сравнения расчетных и из-

меренных значений температуры почвы, однако его величина устойчива для сходных условий. Для Северо-Востока России рекомендованные значения параметра  $\alpha$  составляют 1–2 в зависимости от ландшафта.

Аналогично выражению (25) коэффициент теплообмена между двумя слоями почвы определяется соотношением

$$\xi_{i,i+1} = 2/(\Delta x_i/\lambda_i + \Delta x_{i+1}/\lambda_{i+1}),$$

а коэффициент теплообмена между атмосферой и снежным покровом рассчитывается как

$$\psi_c = 1/[\Delta x_c/2\lambda_c + 1/\alpha_c], \quad (26)$$

где  $\Delta x_i$ ,  $\Delta x_c$  – толщина РСП и снежного покрова, м;  $\lambda_i$ ,  $\lambda_c$  – коэффициенты теплопроводности РСП и снежного покрова,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$ . Параметр подвода тепловой энергии к поверхности снежного покрова при отрицательной температуре воздуха ( $\alpha_c$ ) принимается равным 5,0  $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$ .

Для вычисления коэффициента теплопроводности сухого снега предлагается использовать выражение (18), в котором в качестве твердого вещества выступает лед:

$$\lambda_c^* = \lambda^*(1 - \varepsilon_c)^m = \lambda^*(\gamma_c^*/\rho^*)^m, \quad (27)$$

где  $\lambda^*$ ,  $\lambda_c^*$  – коэффициенты теплопроводности льда и сухого снега,  $\text{Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$ ;  $\varepsilon_c$  – пористость снега,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ ;  $\rho^*$ ,  $\gamma_c^*$  – плотность льда и снега,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $m$  – параметр.

На значение эффективного коэффициента теплопроводности влияет температура снега. Учитывая, что влияние конвекции с ростом плотности снега падает, в расчет вводится выражение [Виноградов, 1988] вида

$$\lambda_c^*(\theta_c, \gamma_c^*)/\lambda_c^* = 1 + \exp(k_3\theta_c)(1 - \gamma_c^*/\rho^*), \quad (28)$$

где  $\theta_c < 0$   $^\circ\text{C}$  – температура снега,  $^\circ\text{C}$ ;  $k_3 = 0,1$  – параметр. Таким образом, при отрицательной температуре снега для расчета коэффициента теплопроводности сухого снега ( $\lambda_c^*$ ) используется выражение (27) с множителем (28) и добавлением небольшого постоянного члена:

$$\lambda_c^* = \left[ 1 + \exp(k_3\theta_c)(1 - \gamma_c^*/\rho^*) \right] \left[ \lambda^*(\gamma_c^*/\rho^*)^m + 0,02 \right].$$

Когда слой снежного покрова содержит воду, для оценки коэффициента теплопроводности снежного покрова можно использовать уравнение типа (22):

$$\lambda_c = [(\lambda_c)_M - \lambda_c^*]\omega_c^n + \lambda_c^*,$$

$$(\lambda_c)_M = \lambda^*(1 - \varepsilon_c) + \lambda^*\varepsilon_c = (\lambda^* - \lambda^*)\gamma_c^*/\rho_c + \lambda^*,$$

где  $(\lambda_c)_M$  – коэффициент теплопроводности снега, поры которого полностью заполнены водой (фиктивная величина),  $\text{Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$ ;  $\omega_c = u_c/\varepsilon_c$  – за-

Таблица 1. Значения удельной теплоемкости  $c$  и теплопроводности  $\lambda_0$  разных типов почв

Почвы	$c$ , Дж/(кг· $^\circ\text{C}$ )	$\lambda_0$ , Вт/(м· $^\circ\text{C}$ )
Песчаные	780	2,5
Супесчаные	830	1,7
Суглинистые	840	1,3
Глинистые	880	1,0
Торфяные	1930	0,8

полненность пористого пространства снега водой,  $m^3/m^3$ ;  $u_c$  – объемная влажность снега,  $m^3/m^3$ ;  $n$  – параметр. Фиктивный коэффициент теплопроводности мокрого снега  $(\lambda_c)_M$  используется только при расчете коэффициентов теплообмена снежного покрова и верхнего РСП по формуле (24) и атмосферы и снежного покрова при его промерзании согласно (26). В предложенной расчетной схеме принимается условие однородности и изотропности влажности снега.

При положительной температуре воздуха и процессе снеготаяния (когда поступившее в снег тепло полностью расходуется на фазовое превращение) коэффициент теплообмена принимается равным коэффициенту подвода тепловой энергии ( $\alpha_c^+$ ). Он связан с коэффициентом стаивания снега

$$\psi_c^+ = \alpha_c^+ = l^* \rho^* \zeta,$$

где  $l^*$  – удельная массовая теплота плавления льда, Дж/кг;  $\zeta$  – коэффициент стаивания снежного покрова,  $m/(^{\circ}C \cdot c)$ .

**ОБЩАЯ СХЕМА РАСЧЕТА**

Для проведения расчета при наличии снежного покрова задается начальный запас воды в снеге, плотность, температура и, если снежный покров находится в процессе таяния (температура равна  $0^{\circ}C$ ), водонасыщенность. Для каждого расчетного слоя почвы необходимо знать начальные значения средней температуры РСП и его влажности (или льдистости). При отсутствии информации о начальном профиле температуры почвенной колонки задается однородное распределение с учетом переменного состояния активного слоя на дату начала расчета. Выравнивание температуры почвы до реальных значений происходит достаточно быстро (в течение одного расчетного года), в дальнейшем не оказывая влияния на результаты расчета. На каждый очередной РИВ задаются значения средней температуры воздуха ( $\eta$ ) и температуры почвы на фиксированной глубине ( $\theta_{gr}$ ), определяющие теплообмен с атмосферой и нижележащими слоями почвогрунтов соответственно. В ходе расчета для последовательных интервалов времени вычисляются текущие профили температуры ( $\theta_i$ ), относящиеся к концу РИВ. При переходе к следующему РИВ полученные значения играют роль начальных условий.

Общая блок-схема расчета представлена на рис. 1. В блоке “Диагноз” определяется наличие или отсутствие снежного покрова, а также оценивается предварительная величина количества тепловой энергии в снежном покрове после испарения. В блоке “Испарение из почвы” оценивается количество тепловой энергии в РСП с учетом потерь энергии, затраченной на испарение. Блок “Энергия-1” предназначен для расчета количества

тепловой энергии, необходимого для таяния льда или замерзания воды в снежном покрове и каждом РСП. Расчет тепловых свойств снежного покрова и РСП с учетом переменных состояний (влажности, наличия льда), таких как теплоемкость, теплопроводность, а также коэффициентов теплообмена системы согласно уравнениям (18)–(23) происходит в блоке “Физические свойства”. В блоке “Коэффициенты” применяются формулы (11)–(17) для оценки коэффициентов  $R$ ,  $N$  и  $L$ . В блоке “Решение” выполняется расчет количества тепловой энергии, поступившей в снежный покров и РСП за РИВ или его подынтервал. В блоке “Энергия-2” определяется, на какой процесс будет расходоваться поступившая энергия в случае фазового перехода – замерзание или таяние. В блоке “Дуализм” оценивается, происходят ли в течение одного РИВ два процесса в снежном покрове и РСП – изменение температуры и фазовый переход (так

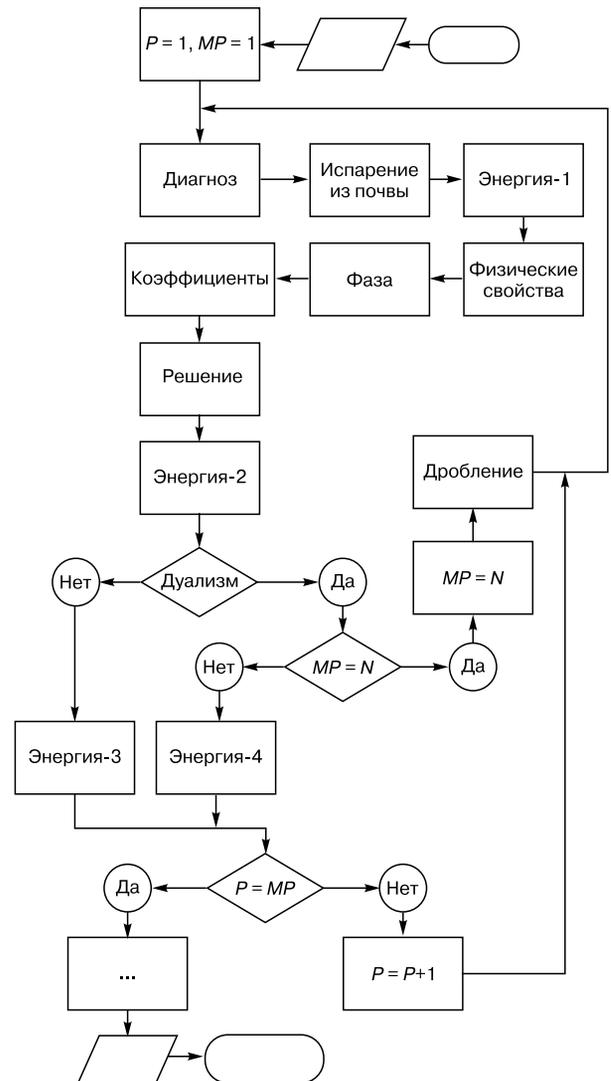


Рис. 1. Блок-схема расчетного алгоритма.

называемый дуализм), а также определяется необходимость дробления РИВ на более мелкие подынтервалы. Блок “Дробление” предназначен для фрагментации РИВ на заранее заданное число расчетных подынтервалов  $MP$ . Практика моделирования показывает, что значение  $MP = 10$  достаточно для большинства расчетов, в случае необходимости оно может быть увеличено. После дробления расчет проводится по полной схеме, начиная с блока “Диагноз”, для подынтервалов РИВ в количестве  $MP$ . При выявлении наличия фазового перехода и нагревания–охлаждения в расчетный подынтервал времени блок “Энергия-4” используется для выбора преобладающего процесса, второстепенный процесс отбрасывается. В блоке “Энергия-3” оценивается окончательное количество тепловой энергии, поступившей в РСР или снежный покров при отсутствии дуализма.

### РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера применения предложенного метода приводятся результаты расчета температуры почвы на разных глубинах для площадки метеостанции “Нижняя”, расположенной на территории КВБС, которая находится в верховьях р. Колыма в пределах Магаданской области. Территория характеризуется суровым климатом и сплошным распространением многолетней мерзлоты. В течение семи лет (1974–1980) на метеоплощадке “Нижняя” производились измерения температуры почвы на разных глубинах от поверхности до 320 см.

Подстилающая поверхность метеоплощадки “Нижняя” в [Материалы..., 1959–1991] характеризуется как кочковатая, поросшая мхом, травой, брусничником и голубичником. Толщина мохово-лишайникового покрова составляет 40–45 см. Под ним располагается слой хорошо промытого щебня мощностью 15–20 см, который при отрицательных температурах находится в морозном состоянии (с малым содержанием льда) и подстилается сильнольдистым щебнем. В весенний период

верхний горизонт аккумулирует часть талых вод, которая подвергается многократному повторному замерзанию. На всех глубинах почвенного профиля прослеживается зависимость хода температуры от влажности и льдистости. Как отмечено в работе [Готов, Глотова, 2002], ход температуры почвы на метеоплощадке “Нижняя” характерен для хорошо дренируемых грунтов на склонах южной экспозиции.

В целях расчета профиль глубиной 2 м (при максимальной глубине протаивания до 1,7 м) был схематизирован в виде 20 слоев толщиной 10 см каждый. Свойства различных горизонтов почвенного профиля (табл. 2), оцененные по описаниям почвенного разреза в [Материалы..., 1959–1991] и работам [Готов, 2002; Банцеккина, 2003], использовались в качестве параметров модели “Гидрограф” [Виноградов, 1988, 2010; Vinogradov et al., 2011].

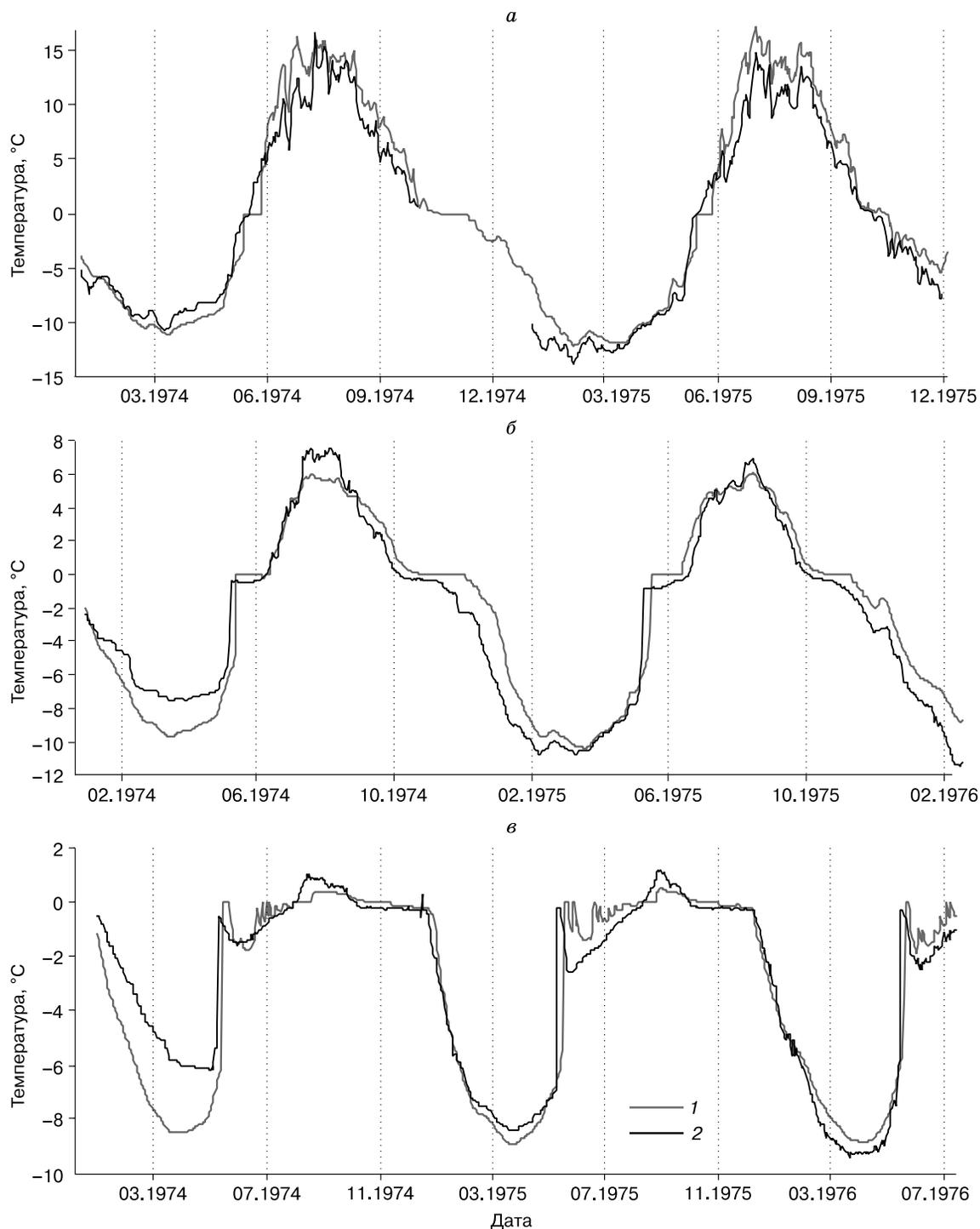
Для упрощения расчетов начальный профиль температуры почвенного слоя был принят однородным, ее среднее значение для каждого РСР принято равным  $-1^\circ\text{C}$  на начальную дату расчета 1 января 1973 г. В качестве разгонного был использован 1973 год, и при анализе результатов он не учитывался. Начальные значения льдистости РСР задавались следующим образом: до глубины летнего протаивания 1,7 м содержание льда равно максимальной водоудерживающей способности слоя, а ниже – пористости.

На каждый расчетный интервал времени, равный суткам, задавались средняя температура, относительная влажность воздуха и количество осадков, измеренные на метеорологической станции площадки “Нижняя”. В качестве нижнего граничного условия принят годовой ход температуры почвы на глубине 3,2 м, аппроксимированный синусоидой (3) с параметрами  $\bar{\theta}_c = -4,0$ ,  $M = 2,8$ ,  $Am = 197$ . Параметр  $k_1$  определен как 0,05. При формировании и стаивании снежного покрова, описываемого одним из расчетных блоков модели “Гидрограф”, он рассматривался в качестве отдельного расчетного слоя. На каждом РИВ тепло-

Таблица 2. Свойства различных горизонтов почвенного профиля метеорологической площадки “Нижняя” (КВБС)

Тип почвенного материала	$h$ , см	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\varepsilon$	$\omega$	$c$ , Дж/(кг·°C)	$\lambda$ , Вт/(м·°C)
Мохово-лишайниковый покров	0–10	500	0,95	0,35	1700	1,0
Торф	10–20	1950	0,60	0,15	1700	1,0
Переходный слой	20–30	2100	0,50	0,11	1200	1,3
Серая глина с обломками глинистых сланцев	30–40	2700	0,40	0,10	750	1,7
Обломки глинистых сланцев с мелкозернистым заполнителем	40–200	2700	0,35	0,10	750	1,7

Примечание.  $h$  – глубина горизонта;  $\rho$  – плотность;  $\varepsilon$  – пористость;  $\omega$  – максимальная водоудерживающая способность;  $c$  – удельная теплоемкость;  $\lambda$  – теплопроводность.



**Рис. 2.** Рассчитанная (1) и измеренная (2) температура почвы на глубине 20 см (а), 80 см (б), 160 см (в), Колымская водно-балансовая станция (1974–1975 гг.).

проводность и теплоемкость всех РСП оценивались с учетом их переменных состояний, влажности и льдистости.

На рис. 2, а–в приведены значения рассчитанной и измеренной среднесуточной температуры

почвы на глубинах 20, 80 и 160 см за период 1974–1975 гг. В среднем рассчитанные значения оказались выше измеренных, а наибольшие отклонения наблюдались в летний период. Результаты сопоставления рассчитанных и измеренных значений

Таблица 3. Статистические характеристики сопоставления рассчитанных и измеренных суточных значений температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) почвы на разных глубинах на метеоплощадке “Нижняя”

$h$ , см	$\delta$ , сут	$T_{\text{изм}}, ^{\circ}\text{C}$	$T_{\text{рас}}, ^{\circ}\text{C}$	ССО, $^{\circ}\text{C}$	СКО, $^{\circ}\text{C}$	$R^2$
20	2099	-2,5	-1,2	1,3	2,4	0,98
40	2070	-3,0	-1,8	1,2	2,4	0,97
80	2736	-3,6	-2,9	0,7	1,6	0,97
160	2859	-3,3	-3,1	0,2	1,3	0,94

Примечание.  $h$  – глубина;  $\delta$  – длина выборки;  $T_{\text{изм}}$ ,  $T_{\text{рас}}$  – средние измеренное и рассчитанное значения температуры соответственно; ССО – среднее систематическое отклонение; СКО – среднее квадратическое отклонение;  $R^2$  – коэффициент корреляции.

за 1974–1981 гг. представлены в табл. 3. Можно отметить, что даже специфический процесс кратковременного повышения температуры воздуха в результате фильтрации талой воды в мерзлую почву весной успешно отображается моделью “Гидрограф”.

Полученные результаты демонстрируют, что метод может быть использован в задаче расчета динамики тепла в зоне распространения вечной мерзлоты. При анализе результатов необходимо учитывать, что параметры модели были определены априори, без калибровки.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод расчета динамики тепла в почве, основанный на приемах, упрощающих дифференциальное уравнение теплопроводности в почвенном профиле и позволяющих получить его алгебраическое решение. Приемы заключаются в следующем: 1) замена непрерывной величины температуры контактирующих РСП на осредненные и постоянные значения за РИВ  $\Delta t$ ; 2) применение в качестве решения полученных систем уравнений не количества тепловой энергии в РСП на конец РИВ ( $U^*$ ), а его приращения относительно начала РИВ ( $\Delta U = U^* - U_0$ ), которое позволяет использовать расчетную схему как в случае изменения температуры РСП, так и в случае фазовых переходов; 3) введение в расчет эффективных средних значений энергии, занимающих промежуточное положение между начальными и конечными величинами; 4) дробление расчетного интервала времени в тех случаях, когда за РИВ происходит как нагревание–охлаждение РСП, так и фазовый переход.

Предложены также способы расчета коэффициентов теплопроводности и теплообмена расчетных слоев почвы и снежного покрова, находящихся в переменных состояниях, используемых при моделировании процессов теплообмена в почвенной колонке и снеге.

Описанный подход, разработанный еще в 1990-е гг. и опубликованный в монографии [Виноградов, 1988] и учебном пособии [Виноградов,

2010], был реализован в гидрологической модели “Гидрограф” [Виноградов, 1988, 2010; Vinogradov et al., 2011], опробован и успешно применен при моделировании процессов формирования стока в зоне распространения многолетней мерзлоты [Settenova et al., 2013].

В качестве параметров модели используются физические свойства материалов, слагающих почвенный профиль. На основе данных наблюдений такие свойства могут быть систематизированы для характерных ландшафтов и учтены на водосборах со схожими условиями формирования стока.

Более подробные результаты верификации метода моделирования динамики деятельного слоя будут опубликованы в Части 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-05-31035\_мол\_а).

### Литература

- Аржанов М.М., Елисеев А.В., Демченко П.Ф., Мохов И.И. Моделирование изменений температурного и гидрологического режимов приповерхностной мерзлоты с использованием климатических данных (реанализа) // Криосфера Земли, 2007, т. XI, № 4, с. 65–69.
- Банцеккина Т.В. Особенности гидротермического режима слоя сезонного протаивания крупнообломочных склоновых отложений в весенне-летний период (на примере Верхнеколымского нагорья): Дис. ... канд. геогр. наук. Якутск, 2003, 137 с.
- Виноградов Ю.Б. Математическое моделирование процессов формирования стока. Опыт критического анализа / Ю.Б. Виноградов. Л., Гидрометеоздат, 1988, 312 с.
- Виноградов Ю.Б. Математическое моделирование в гидрологии / Ю.Б. Виноградов, Т.А. Виноградова. М., Академия, 2010, 366 с.
- Глотов В.Е. Подземные воды бассейна руч. Контактный как фактор формирования общего водного стока // Факторы формирования общего стока малых горных рек в Субарктике (по материалам Колымской водно-балансовой станции). Магадан, СВКНИИ ДВО РАН, 2002, с. 105–122.
- Глотов В.Е., Глотова Л.П. Геолого-геоморфологические и геокриологические факторы формирования поверхностного стока руч. Контактный // Там же, с. 81–104.
- Гусев Е.М. Моделирование тепло- и влагообмена поверхности суши с атмосферой / Е.М. Гусев, О.Н. Насонова. М., Наука, 2010, 327 с.

- Кучмент Л.С., Гельфан А.Н., Демидов А.И.** Модель формирования стока на водосборах зоны многолетней мерзлоты (на примере верхней Колымы) // Вод. ресурсы, 2000, т. 27, № 4, с. 435–444.
- Литвин А.С.** Сравнение методов расчета динамики тепла дисперсной среды // Тр. ГГИ, 1991, вып. 343, с. 73–83.
- Материалы** наблюдений Колымской водно-балансовой станции 1948–1990 гг. Вып. 1–34. Магадан, Колымское УГКС, 1959–1991.
- Bowling L.C., Cherkauer K.A., Adam J.C.** Current capabilities in soil thermal representations within a large scale hydrology model // Proc. of the 9th Intern. Conf. on Permafrost, Fairbanks, Alaska, USA, Inst. Northern Eng., Univ. Alaska, 2008, vol. 1, p. 177–182.
- Goodrich L.E.** Efficient numerical technique for one dimensional geothermal problems with phase change // Intern. J. Heat Mass Transf., 1978, vol. 21, p. 615–621.
- Nelson F.E., Shiklomanov N.I., Mueller G., Hinkel K.M., Walker D.A., Bockheim J.G.** Estimating active layer thickness over a large region: Kuparuk river basin, Alaska, USA // Arctic, Antarctic and Alpine Res., 1997, vol. 29 (4), p. 367–378.
- Pomeroy J.W., Gray D.M., Brown T. et al.** The cold regions hydrological model: a platform for basing process representation and model structure on physical evidence // Hydrol. Process., 2007, vol. 21, p. 2650–2667.
- Semenova O.M.** Experience in modelling runoff formation processes at different scales using data of water-balance stations // IAHS Publ., 2010, vol. 336, p. 167–172.
- Semenova O., Lebedeva L., Vinogradov Yu.** Simulation of subsurface heat and water dynamics, and runoff generation in mountainous permafrost conditions, in the Upper Kolyma River basin, Russia // Hydrogeol. J., 2013, vol. 21, iss. 1, p. 107–119, doi:10.1007/s10040-012-0936-1.
- Semenova O.M., Vinogradova T.A.** An universal approach to runoff processes modelling: coping with hydrological predictions in data-scarce regions // IAHS Publ., 2009, vol. 333, p. 11–19.
- Vinogradov Yu.B., Semenova O.M., Vinogradova T.A.** An approach to the scaling problem in hydrological modelling: the deterministic modelling hydrological system // Hydrol. Process., 2011, vol. 25, p. 1055–1073, doi:10.1002/hyp.7901.
- Zhang Z., Kane D.L., Hinzman L.D.** Development and application of a spatially distributed Arctic Hydrologic and Thermal Process Model (ARHYTHM) // J. Hydrol. Process., 2000, vol. 14(6), p. 1017–1044.

Поступила в редакцию  
25 ноября 2012 г.