

НАДЕЖНОСТЬ ОСНОВАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ В КРИОЛИТОЗОНЕ

УДК 551.340: 51-74

**МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ
СЕЗОННЫХ ОХЛАЖДАЮЩИХ УСТАНОВОК**

Н.И. Сидняев, Ю.С. Ильина

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, Россия; Sidn_ni@mail.ru, Jm.bmstu@yandex.ru*

Изложены вопросы надежности геотехнических сооружений. Предложены новые математические модели, описывающие реальные физические процессы, воздействующие на сезонные охлаждающие установки. Приведены формулы для расчета надежности сезонных охлаждающих установок, эксплуатируемых в сложных климатических условиях с соответствующей геологической средой (вечномерзлыми грунтами). Представлены примеры расчета надежности сезонных охлаждающих установок, учитывающие температурные перепады, механические нагрузки (поломки, трещины, неустойчивости, недопустимые деформации). Изложены методы расчета сложных систем сооружений на основе статистического моделирования. Рассмотрены задачи возникновения отказов работоспособности сложных геотехнических устройств от различных физических параметров.

Вечномерзлые грунты, криолитозона, температурное поле, вероятность, статистика, надежность, устойчивость, механические нагрузки, математические модели

**METHODS FOR THE DEFINITION OF REALIABILITY
FOR SEASONAL REFRIGERATING CONSTRUCTIONS**

N.I. Sidnyaev, Y.S. Ilina

*Bauman Moscow State Technical University,
105005, Moscow, 2nd Baumanskaya st., 5, Russia; Sidn_ni@mail.ru, Jm.bmstu@yandex.ru*

The article deals with the questions of the reliability of geotechnical structures. New mathematical models describing the real physical processes that affect the seasonal refrigerating constructions are suggested. Equations for the calculation of reliability of the seasonal refrigerating constructions operating in hard climatic conditions with the appropriate geological environment are given. The examples of the calculations of reliability of seasonal refrigerating constructions taking into account the temperature changes and types of mechanical stress (damage, cracks, instability, unacceptable strain) are presented. The methods of calculation of complex systems based on statistical modeling are suggested. The problems of complex geotechnical device failures are considered as well.

Permafrost, cryolithozone, temperature field, probability, statistics, reliability, stability, mechanical stress, mathematical models

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ
ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ**

Теория надежности несущих элементов различных конструкций геотехнических сооружений, предназначенных для работы в области распространения многолетнемерзлых пород в условиях значительных статических и динамических воздействий, базируется на теории прочности, сопротивлении материалов, теории упругости и других разделах строительной механики. В теории надежности геотехнических сооружений первостепенную роль играет правильное и четкое определение

отказа, причем критерий отказа зависит от конкретных условий эксплуатации и назначения геотехнического сооружения. В нашем случае критерий отказа тесно связан с определенными тепловыми и механическими процессами, которые приводят к остановке работы геотехнического сооружения, например термосваи (рис. 1). При таком подходе удастся более глубоко проникнуть в физику явления отказа из-за тепловых и механических воздействий и использовать эти знания

для предупреждения развития таких негативных процессов, как резонансы, потеря устойчивости, ложное срабатывание термостабилизирующих устройств, разрушение и других, которые в настоящее время лишь пассивно регистрируются, оставаясь вне анализа.

Наука об исследовании строительных конструкций на прочность имеет длительную историю. Самым подробным образом исследованы и классифицированы свойства строительных элементов [ГОСТ 25100-82, 1982]. Отметим, что фундамент здания является его главным конструктивным элементом, передающим нагрузку от здания на основание (см. рис. 1). На рис. 2, а, б приведены для сравнения диаграммы растяжения пластинчатой и хрупкой конструкций соответственно. Из сравнения этих диаграмм растяжения видно, что хрупкая конструкция разрушается в том случае, когда напряжение разрушения равняется максимальному напряжению ($\sigma_{кр} \approx \sigma_{max}$) в точке $(\epsilon_{кр}, \sigma_{кр})$, где $\epsilon_{кр}$ – относительное удлинение разрушения. При небольшой относительной деформации хрупкая конструкция не имеет площадки текучести. Однако следует отметить, что в зависимости от напряженного состояния, скорости растяжения, температуры и других условий пластичность конструкции изменяется. Точка $(\epsilon_{max}, \sigma_{max})$ на рис. 2, а соответствует наибольшему значению растягивающего усилия (здесь ϵ_{max} – максимальное относительное удлинение). Напряжение, равное отношению наибольшего растягивающего усилия к первоначальной заморозенной площади, есть предел прочности σ_{max} . При достижении предела прочности постепенно начинает образовываться местное сужение сечения конструкции. С появлением сужения в поперечном сечении деформация конструкции происходит при умень-

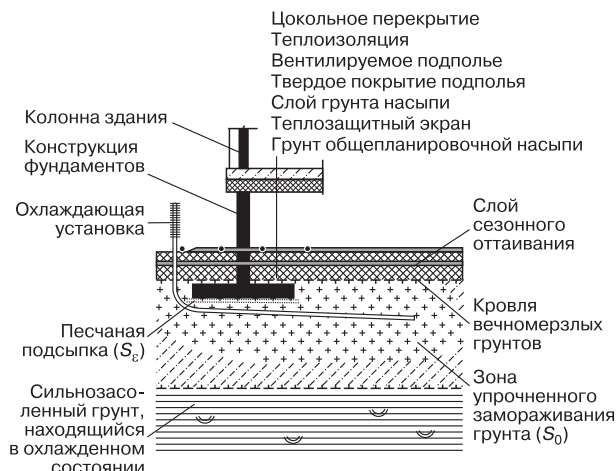


Рис. 1. Схема фундамента, опирающегося на кровлю вечномерзлых грунтов, по I принципу строительства и эксплуатации.

шающейся нагрузке. При напряжении, соответствующем точке $(\epsilon_{кр}, \sigma_{кр})$, конструкция разрушается (см. рис. 2, а). Напряжение в момент разрушения конструкции, согласно диаграмме растяжения, лежит ниже предела прочности σ_{max} (см. рис. 2, а). Это объясняется тем, что напряжения в нашем случае относятся к первоначальной площади поперечного сечения конструкции. Представленная диаграмма является условной, так как напряжения в ней относятся к первоначальному поперечному сечению, а удлинение – к первоначальной длине. Поперечное сечение и длина конструкции во время эксплуатации непрерывно изменяются. При построении диаграммы на оси ординат откладывают напряжения, полученные де-

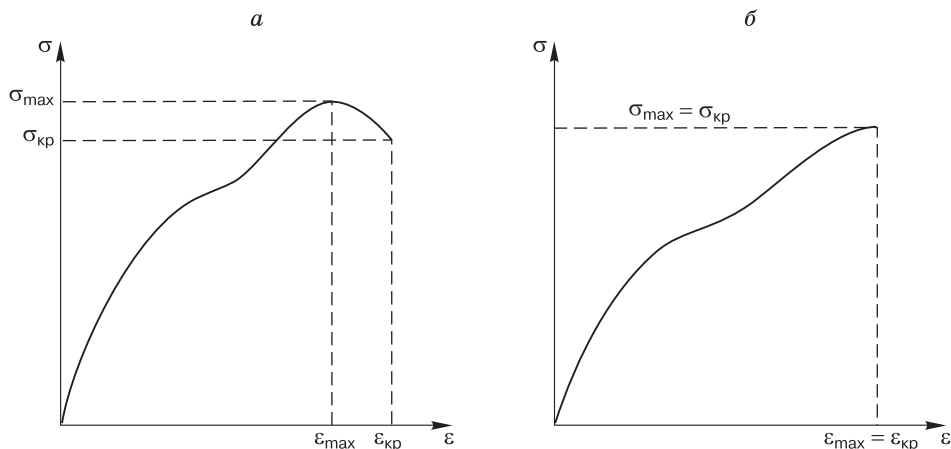


Рис. 2. Диаграммы растяжения пластинчатой (а) и хрупкой (б) конструкций.

$a - \sigma = Q/S_0$; $b - \sigma = Q/S_e$; S_0 – площадь заморозенного грунта под геотехническим сооружением; S_e – площадь подсыпки под геотехническим сооружением; Q – нагрузка; σ , σ_{max} , $\sigma_{кр}$ – напряжение, максимальное напряжение, напряжение разрушения соответственно; ϵ , ϵ_{max} , $\epsilon_{кр}$ – относительное удлинение, максимальное относительное удлинение и относительное удлинение разрушения соответственно.

лением силы на соответствующее значение минимальной площади поперечного сечения конструкции, а на оси абсцисс – истинные относительные удлинения конструкции, т. е. изменения длины относят к длине конструкции в данный момент деформации.

Предел прочности является важной характеристикой прочности конструкции, и особенно большое значение он имеет для хрупких конструкций, которые получают сравнительно небольшие деформации при разрушении.

Необходимо отметить, что глубину заложения подошвы фундамента в грунт принимают не менее 2 м ниже подошвы слоя сезонного промерзания или оттаивания для свай и не менее 1 м для остальных фундаментов. Для других строительных конструкций область пластических деформаций отсутствует, и разрушение наступает сразу после области упругих деформаций, которые при большой величине приложенных сил становятся нелинейными. Существенные особенности в прочностном поведении строительных материалов проявляются при воздействии быстро меняющихся во времени динамических разовых нагрузок Q [ГОСТ 25100-82, 1982].

Известно, что даже тщательно изготовленные и специально отобранные образцы элементов строительных конструкций значительно отличаются по своим прочностным качествам, не говоря уже о сложных геотехнических объектах. Таким образом, при расчетах сопротивления строительных конструкций необходимо учитывать статистический характер свойств реальных геотехнических объектов, так как при заданной величине нагрузки одна часть конструкции разрушится, а другая сохранит способность выполнять свои функции. Например (см. рис. 1), температурные поля грунтов учитываются при проектировании оснований и фундаментов по принципу I (вечномерзлые грунты основания используются в мерзлом состоянии, сохраняемом во время строительства и в течение всего периода эксплуатации сооружения) или по принципу II (вечномерзлые грунты основания используются в оттаянном или оттаивающем состоянии) [РСН 67-87, 1987]. Результаты прогноза по надежности позволяют сопоставлять различные варианты технических решений управления температурным полем с точки зрения обеспечения необходимой прочности, надежности и устойчивости оснований зданий и сооружений [Пустовойт, 1997; Ершов, 2002].

Если известно априорное распределение предела прочности q конструкции сезонной охлаждающей установки (СОУ), то вероятность неразрушения произвольно выбранного элемента сооружения при однократном воздействии нагрузки Q , т. е. вероятность события $Q < q$, равна [Сидняев, 2011]

$$P(Q) = \int_Q^{\infty} f_q(x) dx, \quad (1)$$

где

$$f_q(x) = \frac{d}{dx} P\{x \leq q\} -$$

плотность распределения предела прочности конструкции геотехнического сооружения [Хрусталева, 2005].

Разброс прочностных характеристик геотехнического сооружения вызывается большим количеством случайных факторов: неоднородностью материала, нестабильностью технологического процесса, температурными перепадами и т. д. Поэтому можно считать, что распределение предела прочности геотехнического сооружения достаточно хорошо описывается нормальным законом, т. е. имеет плотность

$$f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_q}} \exp\left\{-\frac{(x - M_q)^2}{2D_q}\right\}.$$

Здесь M_q, D_q – математическое ожидание и дисперсия соответственно.

В этом случае вероятность $P(Q)$, являющуюся мерой надежности для простейшего процесса статического нагружения, можно выразить через табулированную в широких пределах функцию нормального распределения $\Phi(x)$:

$$P(Q) = \Phi\left(\frac{-Q + M_q}{\sqrt{D_q}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-M_q + Q}{\sqrt{D_q}}\right).$$

Кроме того, для больших значений аргумента x можно записать двусторонние оценки функции Лапласа $\Phi(x)$ для времени t , например, вида [Сидняев, 2011]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) < 1 - \Phi(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

В более сложном случае, когда на механическую конструкцию воздействует однократная нагрузка случайной величины с плотностью распределения [Сидняев, 2011]

$$f_Q(x) = \frac{d}{dx} P\{x \leq Q\},$$

по формуле полной вероятности для вероятности неразрушения можно записать

$$P = \int_0^{\infty} p(x) f_Q(x) dx, \quad P = \int_0^{\infty} \int_Q^{\infty} f_q(x) dx f_Q(x_1) dx_1.$$

Если нагрузка Q – нормально распределенная случайная величина с плотностью

$$f_Q(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_Q}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - M_Q)^2}{2D_Q}\right\},$$

то для вероятности неразрушения геотехнического сооружения P при нормальном распределении величины q выполняется простое соотношение, основанное на том, что сумма нормальных величин имеет результирующее нормальное распределение с математическим ожиданием, равным сумме математических ожиданий, и с дисперсией, равной сумме дисперсий исходных случайных величин [Сидняев, 2011]:

$$P = \Phi \left(\frac{-M_Q + M_q}{\sqrt{D_q + D_Q}} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{-M_q + M_Q}{\sqrt{D_q + D_Q}} \right),$$

где M_Q, D_Q – математическое ожидание и дисперсия случайной величины Q соответственно. В качестве простого примера рассмотрим задачу о зависимости вероятности разрушения от коэффициента запаса прочности. В этом случае надежность геотехнического сооружения [Сидняев и др., 2012] определяется как

$$P = \Phi \left(\frac{-M_q + M_Q}{\sqrt{D_Q + D_q}} \right) = \Phi(n-1), \quad (2)$$

где n – величина, выражающая статистический запас прочности.

Значения вероятности неразрушения (2) в зависимости от запаса прочности [Хрусталеv, 2005] представлены на рис. 3.

Приведенные случаи не содержат в явном виде времени, поскольку касаются статического одноразового приложения силы, однако фактор времени можно учесть, если рассмотреть поток циклических сезонных температурных перепадов. Длительное воздействие переменных нагрузок изменяет внутреннюю структуру геотехнического сооружения [Хрусталеv, 2005], что приводит к усталостному разрушению материала конструкции даже при напряжениях, меньших предела упругости [Сидняев и др., 2012]. Для образцов материалов для металлоконструкций СОУ или, если позволяют условия эксперимента, то и для всей конструкции геотехнического сооружения, строят так на-

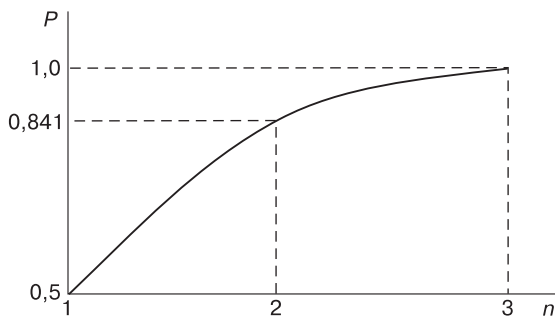


Рис. 3. Зависимости вероятности неразрушения P от статистического запаса прочности n .

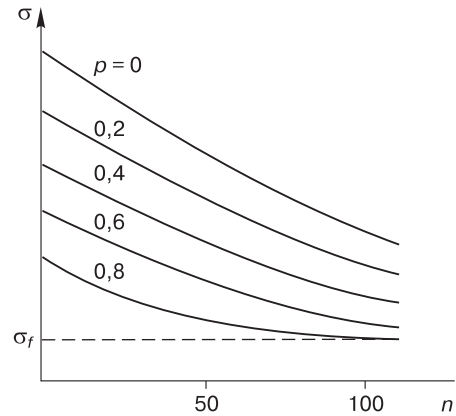


Рис. 4. Диаграмма напряжения σ при различных значениях вероятности неразрушения p и статистического запаса прочности n (σ_f – предельное напряжение начала разрушения).

зываемую диаграмму Велера (рис. 4), на которой можно указать число циклов до разрушения (m) при заданных амплитуде сезонных колебаний и форме воздействующего напряжения. Метод Велера можно обобщить на случай, когда конструкция испытывает всевозможные флуктуации из-за случайных отклонений от строительных норм и требований при возведении геотехнического сооружения [Сидняев и др., 2012]. Так, на рис. 4 представлены зависимости, иллюстрирующие разброс амплитуды (ψ) колебания напряжения параметра глубины залегания фундамента в мерзлом грунте. В результате обобщения метода Велера вместо одной кривой получается семейство, а возле каждой кривой указывается доля (p) неразрушающихся конструкций при данных нагрузке и числе циклов (n) температурных перепадов. Таким образом, удастся включить в рассмотрение статистические данные по отклонению от строительных норм и технологий.

Необходимо отметить, что материалы, используемые для создания соединений в геотехнических сооружениях, не имеют четко выраженного предела усталости [Хрусталеv, 2005]. При сколь угодно малой амплитуде циклической нагрузки число циклов до разрушения будет конечным. Для количественной аппроксимации результатов усталостных испытаний соединений можно использовать уравнение Одингга–Вейбулла, которое можно записать в виде

$$t\psi^\gamma = A,$$

где t – время до начала разрушения; ψ – амплитуда циклической нагрузки; A, γ – коэффициенты, постоянные для данного материала. Неизменность величины A в широком диапазоне изменения факторов нагрузки Q и ψ и ее постоянство для данного

механизма разрушения позволяют использовать выражение Одингга–Вейбулла в качестве динамической модели накопления энергии при усталостном разрушении.

Если предположить, что усталостное разрушение соединения представляет собой процесс роста и взаимодействия трещин, существовавших на поверхности соединения до приложения циклической механической нагрузки, кинетика разрушения аналогично диффузии из ограниченного источника [Сидняев и др., 2012] выражается в виде

$$C(x,t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi Wt}} \exp\left(-\left(\frac{x}{2\sqrt{Wt}}\right)^2\right),$$

где $C(x, t)$ – концентрация трещин, вершина которых достигла средней глубины трещин x в момент разрушения t ; C_0 – начальная поверхностная концентрация трещин (вакансий). При этом

$$W = W_0 \exp\left(-\frac{E_0 - kA}{RT}\right),$$

где W – коэффициент самодиффузии материала; W_0 – величина, постоянная для данного материала; E_0 – энергия сублимации материала; k – множитель, учитывающий потерю энергии на упругую деформацию; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; t – длительность времени приложения циклической нагрузки.

Данная аналитическая зависимость описывает одновременное развитие нескольких трещин, каждая из которых растет по экспоненциальному

закону, кроме того, она учитывает уменьшение концентрации трещин вследствие взаимодействия структурных дефектов.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЕЗОННЫХ ОХЛАЖДАЮЩИХ УСТАНОВОК

Охлаждение пластинчато-мерзлых грунтов производится с целью превращения их в твердомерзлые, соответственно, для повышения их прочности и снижения деформационных свойств. Замерзание талых грунтов производится с целью создания однородных мерзлотных условий на строительной площадке путем промораживания несквозных таликов.

Характер воздействий на СОУ настолько многообразен, что конструкции, уже испытанные на прочность, могут оказаться ненадежными. Серьезную угрозу для тонкостенных и весьма длинных колонок конструкций (рис. 5) представляют отказы, возникающие в результате механической потери устойчивости из-за оттаивания грунтов. Проблема устойчивости в настоящее время включает довольно широкий круг задач.

Так, уравнение движения упругой конструкции под действием силы Q , которая в общем случае может зависеть от обобщенной координаты u , от скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$, а также от некоторого конструктивного параметра L (например, СОУ), имеет вид

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u, L\right) = 0.$$

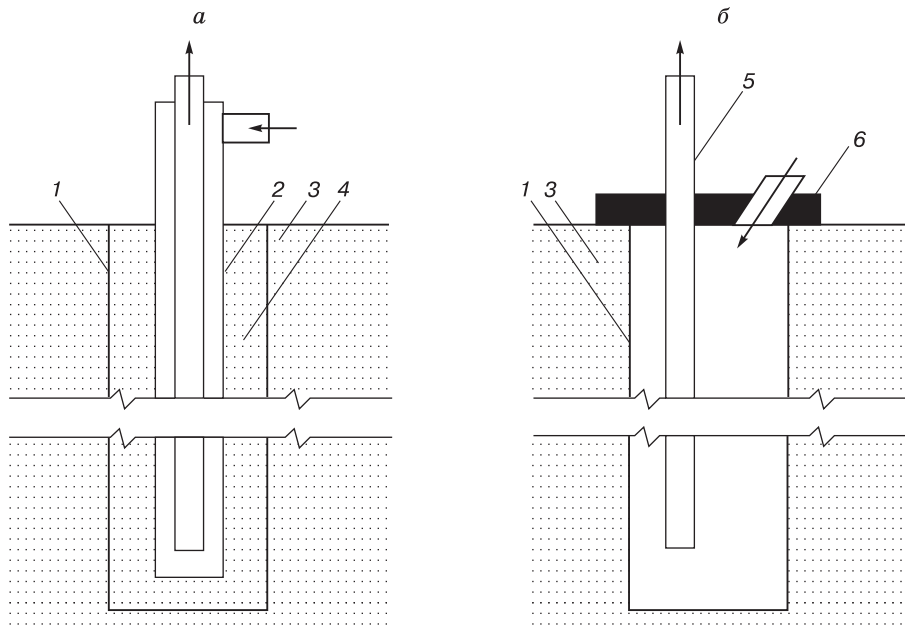


Рис. 5. Охлаждение, замораживание грунтов сезонными охлаждающими установками:

а – колонками; *б* – трубами; 1 – скважина, 2 – колонка, 3 – грунт, 4 – песчаная засыпка, 5 – отсасывающая труба, 6 – входной патрубок с крышкой.

При критическом значении параметра L устойчивая точка равновесия становится неустойчивой. Она расщепляется на две устойчивых и одну неустойчивую. Конструкция резко (скачком) переходит из неустойчивого равновесия в устойчивое состояние. При этом ее несущая способность обычно падает, деформации нарастают и происходит разрушение.

В качестве иллюстрации рассмотрим колонку для замораживания грунтов, сжатую продольной силой Q . Решение этой типичной задачи Эйлера сводится, как известно [Ершов, 2002], к решению следующего дифференциального уравнения движения:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

где $u = u(x, t)$ – смещение, зависящее от пространственной координаты x и времени t ; остальные механические параметры колонки СОУ: J – момент инерции сечения; E – модуль Юнга; ρ – плотность материала; S – площадь поперечного сечения.

Решение задачи можно искать, например, в виде $u = u(t) \sin(\pi x/l)$. При такой записи решения граничные условия, соответствующие заделке концов колонки длины l (см. рис. 5), будут удовлетворены, т. е.

$$u(x, t) = \partial^2 u(x, t) / \partial x^2 = 0$$

при $x = 0$ и $x = l$.

Подставив это решение в уравнение (3), получаем

$$\rho S \frac{d^2 u}{dt^2} + \left[EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 + Q \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right] u = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты $u(t)$ всегда имеет интеграл, соответствующий закону сохранения энергии:

$$\rho S \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 - Q \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right] u^2 = 0.$$

Отсюда следует, что фазовая траектория зависимости du/dt от u является кривой второго порядка и, в частности, при

$$EJ(\pi/l)^2 - Q > 0 \quad (4)$$

представляет собой эллипс, а при

$$EJ(\pi/l)^2 - Q < 0 \quad (5)$$

гиперболу.

В первом случае (4) равновесная точка, возле которой происходят колебания, является устойчивой, во втором (5) – неустойчивой. Это означает, что при малой силе сжатия, когда $Q < Q_{кр}$, возмущенная система будет совершать колебательные движения возле положения равнове-

сия. При $Q > Q_{кр}$ происходит потеря устойчивости по Эйлеру, или на языке теории колебаний – бифуркация. При этом вместо одной точки устойчивого равновесия – центра, окруженного устойчивыми эллипсоидальными фазовыми траекториями, мы получаем на фазовой плоскости три точки равновесия: две устойчивые (колонка СОУ может прогнуться вправо и влево после потери устойчивости) и одну неустойчивую, соответствующую прямолинейному состоянию. Фазовые траектории в этом случае будут представлять собой две системы замкнутых эллипсообразных кривых, сепаратрису и траектории, охватывающие сепаратрису и оба положения равновесия. Новое состояние, в которое перешла колонка в результате потери устойчивости, для большинства конструкций недопустимо, так как СОУ уже не может нести прежнюю нагрузку, даже если она не разрушилась. Такое состояние следует отнести к отказам конструкции.

Другой широкий класс задач об устойчивости СОУ связан с проблемой параметрического резонанса и описывается уравнением Матье

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (a - 2b \cos 2t) u = 0,$$

где a, b – параметры системы и нагружения.

Рассмотрим, например, уравнение колебания колонки СОУ

$$Q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Сила натяжения колонки Q изменяется во времени по закону $q = Q_0 - Q_1 \cos(\omega t)$. Положив, как и ранее, $u = u(t) \sin(\pi x/l)$ и подставив в (6), получим представленное уравнение Матье. Известно, что существуют области значений параметров (a, b) , при которых решение ограничено, и существуют области значений параметров (a, b) , при которых решение возрастает (рис. 6). Факт на-

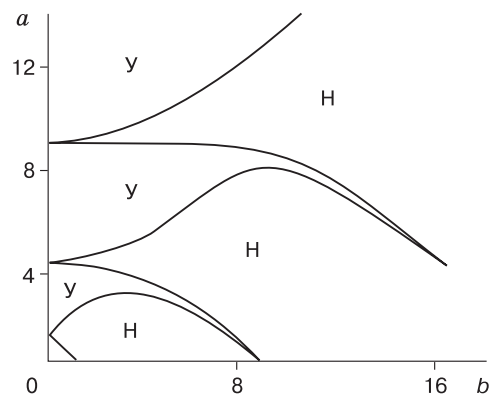


Рис. 6. Области параметров (a, b) для устойчивого решения уравнения Матье.

a, b – геометрические параметры СОУ и вида нагрузки; Y – область устойчивости решения, H – область неустойчивости решения.

растания колебаний во времени можно принять за такое изменение состояния СОУ, которое ведет к потере работоспособности. Надо, однако, иметь в виду, что в реальных ситуациях при определенных значениях величины деформации иногда вступают в действие механизмы, ограничивающие дальнейшее нарастание разрушения (см. рис. 6).

Отметим теперь одно чрезвычайно важное для вопросов надежности обстоятельство, связанное с устойчивостью геотехнического сооружения [Хрусталева, 2005]. Так, например, механические вибрации могут вызывать отказы немеханического происхождения. Предположим, компрессорная СОУ преобразовывает давление на входе $x(t)$ в давление $y(t)$ в соответствии с уравнением

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = x(t). \quad (7)$$

Параметры СОУ a_i , входящие в это уравнение, определяются геометрическими параметрами элементов: скважиной, размерами колонок, взаимными расходами отсасывающей трубы и входного патрубка и др.

При воздействии механических вибраций и температуры все геометрические параметры из-за механических деформаций флуктуируют в соответствии с законами динамической теории упругости. Иначе говоря, все параметры, которые в невозмущенном состоянии были постоянными, получат некоторое приращение Δ_i и будут изменяться во времени в соответствии с уравнением перемещения и уравнением, связывающим деформацию с величиной флуктуации соответствующего параметра. Таким образом, функционирование СОУ в условиях вибраций будет подчиняться новому возмущенному уравнению:

$$\sum_{k=0}^n [a_k + \Delta_k(t)] \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t). \quad (8)$$

Дополнительно теоретическое исследование можно развить в общем виде с помощью метода малых возмущений или метода итераций.

Уравнение (8) преобразуется последовательно к виду

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t) - \sum_{k=0}^n \Delta_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

и к интегральному уравнению:

$$y(t) = y_0(t) - \sum_{i=0}^n \int_0^t \Delta_i(t_1) y^i(t_1) h(t-t_1) dt_1.$$

Здесь $h(t)$ – импульсная переходная функция системы (7); $y_0(t)$ – решение невозмущенного уравнения, которое можно считать известным или найти при помощи интеграла Дюамеля [Сидняев и др., 2010]:

$$y_0(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau + y_1(t),$$

где $y_1(t)$ – решение соответствующего однородного уравнения с некоторыми начальными условиями:

$$y_1(t) = \sum_1^n c_i \exp(\lambda_i t), \quad \sum_0^n a_k \lambda^k = 0$$

(λ_i – корни характеристического уравнения; c_i – постоянная интегрирования).

Отсюда следует, что в соответствии с методом малых возмущений величину искажений $\eta(t)$ можно записать в виде

$$\eta(t) = y(t) - y_0(t) = - \sum_0^n \int_0^t \Delta_i(\tau) y_0^{(i)}(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Если правая часть уравнения в линейных операторах описывается случайным нормальным процессом, то решением уравнения является также случайный нормальный процесс [Хрусталева и др., 2000; Сидняев и др., 2012]. В данном случае ошибка $\eta(t)$ будет описываться случайным нормальным процессом с параметрами:

$$M\{\eta(t)\} = \sum_1^n B_i \exp(\lambda_i t),$$

$$D\{\eta(t)\} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \int_0^t \int_0^t K_{ik}(\tau_1 - \tau_2) y_0^{(i)}(\tau_1) y_0^{(k)}(\tau_2) \times \\ \times h(t-\tau_1) h(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

где B_i – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий; $K_{ik}(t)$ – корреляционная функция воздействующего возмущения.

Зная поведение случайной ошибки во времени, можно, используя аппарат теории пересечений, определить вероятность отказа СОУ из-за циклических нагрузок как превышение параметром $y(t)$ допустимых пределов.

Аналогичное исследование возможно и в случае, когда параметр описывается нелинейным уравнением. В общем случае вместо (7) можно записать уравнение $f(a_i, y^{(i)}, x) = 0$. Пусть в результате вибраций в устройстве возникает сигнал $\delta(t)$. Положив $y(t) = y_0(t) + (\delta t)$, найдем

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \Big|_{y^{(i)}=y_0^{(i)}} \delta^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_i} \Big|_{a_i=a_0} \Delta_i.$$

Это уравнение линейное, но с переменными коэффициентами. Исследованы только некоторые частные виды этого уравнения.

В качестве примера определим собственную частоту и форму колебаний СОУ. Уравнение поперечных колебаний можно представить в виде

$$\frac{Q}{\rho S} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где u – смещение скважины; Q – сила натяжения колонки; x, t – пространственная и временная координаты; ρS – погонная масса; V – продольная скорость.

Граничные условия для этого случая: $u(0) = u(l) = 0$, где l – длина колонки. Решение уравнения (9) записываем в виде

$$u(x, t) = \exp(-i\omega t) (A \exp(ik_1 x) + B \exp(ik_2 x)),$$

где

$$k_1 = \frac{\omega(V+C)}{C^2 - V^2}; \quad k_2 = \frac{\omega(V-C)}{C^2 - V^2};$$

A, B – постоянные интегрирования; C – скорость поперечных волн; ω – частота колебаний. Собственные частоты для этой несамосопряженной задачи можно найти следующим образом. Подставляя в граничные условия найденное решение, получаем

$$A + B = 0, \quad A \exp(ik_1 l) + B \exp(ik_2 l) = 0.$$

Решение не соответствует обычным стоячим волнам. Преобразуем его к виду

$$u(x, t) = \exp\left(\frac{i\omega Vx}{C^2 - V^2} - i\omega t\right) \sin \frac{\omega Cx}{C^2 - V^2}.$$

Теперь можно найти собственные частоты

$$\omega_n = n\pi(C^2 - V^2)/(Cl).$$

Помимо перечисленных механических процессов [Хрусталева, 2005] и соответствующих им статистических характеристик, применяемых для оценки надежности колебательных систем, в последнее время получил развитие довольно общий метод, основанный на математической теории пересечений.

Во всех рассмотренных нами ранее механических моделях конструкций и процессов имеются те или иные идеализации и обусловленные ими трудности, возникающие при практическом анализе надежности конкретных геотехнических сооружений [Хрусталева и др., 2000]. Например, анализ, основанный на понятии статической прочности, не учитывает эволюцию нагрузок во времени. Более того, любой из рассмотренных типов потери устойчивости характеризуется состоянием, угрожающим работоспособности конструкции. В реальных условиях конструкция сохраняет состояние полной или частичной работоспособности даже после потери устойчивости, до тех пор пока деформации не достигнут критического уровня. Иногда деформации нарастают столь слабо, что СОУ успевает выполнить все функции до наступления полного разрушения [Хрусталева, 2005]. Назначая некоторый допустимый уровень для изменения параметров, характеризующих состояние системы, фиксируют тот момент, когда деформации достигнут критических значений, и считают его моментом отказа. При такой постановке задачи надо учитывать случайный характер нагрузок во времени. Допустим, в результате внешних динамических нагрузок СОУ совершает случайные

колебания [Сидняев и др., 2012]. Если решить уравнение движения и найти статистические характеристики обобщенных координат, выразив их через статистические характеристики возмущения, можно найти и совместное распределение фазовых координат. В соответствии с теорией пересечений можно определить интенсивность выбросов значений $I(t)$ случайной нагрузки $Q(t)$ за область допустимых значений. Если допустимая область изменения обобщенных параметров задана, то надежность геотехнического сооружения [Хрусталева и др., 2000] можно приближенно определить как

$$P(t) = \exp\left\{-\int_0^t I(t) dt\right\}.$$

Пример. Предположим, что проводились наблюдения за наработкой до отказа СОУ (см. рис. 1). Устойчивость сооружений оценивалась исходя из статистического анализа геотехнических сооружений на основе уравнений Фоккера–Планка. Процесс колебаний системы в этом случае рассматривался как марковский. Сооружение подвергалось сезонным циклическим нагружениям [Хрусталева и др., 2000]. Общая продолжительность наблюдений составила $t = 6,6$ тыс. сут. Предполагается, что конструкция испытывает всевозможные флуктуации из-за случайных неоднородностей строительного материала [Цытович, 1973], и статистические наблюдения обработаны по методу Веллера. Под наблюдением находились $N = 32$ комплекта СОУ для различных геотехнических сооружений. За период наблюдения отказал 31 комплект, один комплект сохранил работоспособность до конца периода. Для удобства обработки информации период наблюдений был разбит на шесть интервалов наработки. Центры интервалов t_i и соответствующее число комплектов n_i и работоспособных СОУ $N(t_i)$ в каждом из них приведены в таблице.

Статистические наблюдения и расчетные значения параметров надежности сезонных охлаждающих установок

i	t_i	$N(t_i)$	n_i	$\bar{\xi}(t_i)$	$\xi(t_i)$
0	0	32	0	0	0
1	0,5	31	1	0,07	0,06
2	1,5	26	5	0,16	0,20
3	2,5	17	9	0,35	0,34
4	3,5	10	7	0,41	0,47
5	4,5	4	6	0,60	0,61
6	5,5	1	3	0,75	0,74

Примечание. i – номер интервала наблюдений; t_i – центры интервалов, тыс. сут; $N(t_i)$ – число работоспособных СОУ на i -м интервале; n_i – число комплектов в i -м интервале; $\bar{\xi}(t_i)$, $\xi(t_i)$ – эмпирические и теоретические значения изменения отказов во времени на интервалах.

Рассмотрим задачу расчета основных характеристик надежности СОУ применительно к условиям работы геотехнических установок.

Решение. При статистической оценке интенсивность отказа вычисляем по формуле

$$\bar{\xi}(t_i) = \frac{N(t_i) - N(t_{i+1})}{(t_{i+1})N(t_i)}.$$

В частности, для интервалов $i = 1$ и $i = 2$ имеем

$$\bar{\xi}(t_1) = \frac{32 - 31}{0,5 \cdot 32} \approx 0,07, \quad \bar{\xi}(t_2) = \frac{31 - 26}{1 \cdot 31} \approx 0,16.$$

Средняя наработка до отказа

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0 &= \frac{1}{31} [1 \cdot 0,5 + 5 \cdot 1,5 + 9 \cdot 2,5 + 7 \cdot 3,5 + \\ &+ 6 \cdot 4,5 + 3 \cdot 5,5 + (32 - 1)6,6] \approx 3,4 \text{ тыс. сут.} \end{aligned}$$

Дисперсия средней наработки до отказа [Сидняев, 2011]

$$\begin{aligned} \bar{D}_0 &= \frac{1}{31 - 1} [1(0,5 - 3,4)^2 + 5(1,5 - 3,4)^2 + \\ &+ 9(2,5 - 3,4)^2 + 7(3,5 - 3,4)^2 + 6(4,5 - 3,4)^2 + \\ &+ 3(5,5 - 3,4)^2 + (32 - 31)(6,6 - 3,4)^2] \approx 2,1. \end{aligned}$$

При теоретической оценке нетрудно убедиться, что значения $\bar{\xi}(t_i)$ почти совпадают с линейной зависимостью $\xi(t) = 0,135t$. Будем рассматривать эту зависимость [Сидняев и др., 2011] в качестве теоретического закона изменения опасности отказа во времени. Таким образом, функция надежности принимает вид

$$F(t) = \exp \left[- \int_0^t 0,135 \tau d\tau \right] = \exp \left[-(0,26t)^2 \right].$$

Математическое ожидание [Сидняев, 2011] наработки до отказа

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{\infty} \exp \left[-(0,26t)^2 \right] dt = \\ &= (0,26)^{-1} \Gamma \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 3,42 \text{ тыс. сут,} \end{aligned}$$

где Γ – гамма-функция. Заметим, что среднестатистическое значение и математическое ожидание наработки до отказа достаточно близки между собой.

Вероятность безотказной работы в течение $t = 1$ тыс. сут равна

$$P\{\xi > 1\} = \bar{F}(t = 1) = \exp \left[-(0,26 \cdot 1)^2 \right] = 0,93.$$

Вероятность безотказной работы в течение $x = 0,5$ тыс. сут после того, как элемент отработал $t = 2$ тыс. сут, определяется формулой

$$\begin{aligned} P\{\xi_{t=2} \geq 0,5\} &= \\ &= \exp \left[-0,26^2 (2 + 0,5)^2 \right] / \exp \left[-(0,26 \cdot 2)^2 \right] = 0,86. \end{aligned}$$

Необходимо обратить внимание на то, что вероятность безотказной работы в течение $t = 2$ тыс. сут составляет только 0,86. Среднее время остаточной жизни, после того как СОУ уже отработала 2 тыс. сут, составляет

$$t_{0(t=2)} = \int_0^{\infty} \frac{\exp \left[-0,26^2 (2 + x)^2 \right]}{\exp \left[-(0,26 \cdot 2)^2 \right]} dx \approx 2,1 \text{ тыс. сут.}$$

Принципиально метод оценивания вероятности безотказной работы может быть использован для анализа любого показателя надежности геотехнического сооружения.

ВЫВОДЫ

Получены диаграммы растяжения геотехнических сооружений пластинчатой и хрупкой конструкций. Показано, что хрупкая конструкция разрушается при небольшой относительной деформации и не имеет площадки текучести. Отмечено, что при достижении предела прочности постепенно начинает образовываться местное сужение сечения конструкции. С появлением сужения в поперечном сечении деформация конструкции происходит при уменьшающейся нагрузке. Напряжение в момент разрушения конструкции по диаграмме растяжения лежит ниже предела прочности. Поперечное сечение и длина конструкции во время эксплуатации непрерывно изменяются. Получена мера надежности для случая одноразовой нагрузки нормально распределенной случайной величины для вероятности неразрушения геотехнического сооружения.

Решена задача о зависимости вероятности разрушения от коэффициента запаса прочности с учетом длительного воздействия переменных нагрузок, изменяющих внутреннюю структуру геотехнического сооружения, с указанием числа циклов до разрушения при заданных амплитуде сезонных колебаний и форме действующего напряжения.

Показано, что при сколь угодно малой амплитуде циклической нагрузки число циклов до разрушения будет конечным. Для количественной аппроксимации результатов усталостных испытаний предложено уравнение Одина–Вейбулла как динамическая модель накопления энергии при усталостном разрушении. Показано, что усталостное разрушение соединения представляет собой про-

цесс роста и взаимодействия трещин, существовавших на поверхности соединения до приложения циклической механической нагрузки, при этом кинетика разрушения будет определяться аналогично диффузии. Получена аналитическая зависимость, описывающая одновременное развитие нескольких трещин, каждая из которых растет по экспоненциальному закону с учетом уменьшения концентрации трещин вследствие взаимодействия структурных дефектов.

Получено уравнение движения упругой конструкции СОУ под действием нагрузки, которая в общем случае может зависеть от обобщенной координаты, скорости, а также от некоторого конструктивного параметра. Показано, что при критическом значении параметра устойчивая точка равновесия становится неустойчивой и расщепляется на две устойчивых и одну неустойчивую. Решена задача Эйлера в форме дифференциального уравнения движения. Определено смещение СОУ, зависящее от пространственной координаты и времени. Получены аналитические зависимости для фазовых траекторий, которые представляют собой две системы замкнутых эллипсообразных кривых, сепаратрису и траекторию, охватывающую сепаратрису и положения равновесия. Получены уравнения параметрического резонанса и колебания колонки СОУ. Установлено, что факт нарастания колебаний во времени можно принять за такое изменение состояния СОУ, которое ведет к потере работоспособности. Отмечено, что механические вибрации могут вызывать отказы немеханического происхождения. При воздействии механических вибраций и температуры все геометрические параметры из-за механических деформаций флуктуируют в соответствии с законами динамической теории упругости. Все параметры, которые в невозмущенном состоянии были постоянными, получают некоторое приращение и будут меняться во времени в соответствии с уравнением перемещения и уравнением, связывающим деформацию с величиной флуктуации соответствующего параметра. Таким образом, функционирование СОУ в условиях вибраций будет подчиняться возмущенному уравнению (8). Зная поведение случайной ошибки во времени, можно, используя аппарат теории пересечений, определить вероятность отказа СОУ из-за циклических нагрузжений как превышение конструктивным параметром допустимых

пределов. Определены собственная частота и форма колебаний СОУ. Выявлены допустимые уровни для изменения параметров, характеризующих состояние геотехнической системы с учетом случайного характера нагрузки во времени.

Приведены примеры расчета надежности СОУ для оснований сооружений, влияющих на устойчивость фундаментов. Представлены зависимости функции надежности как вероятности сохранения качества геотехнической системы для различных параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке ОАО "Газпром".

Литература

- ГОСТ 25100-82.** Грунты. Классификация. Методы исследования строительных свойств грунтов. М., Стройиздат, 1982, 215 с.
- Ершов Э.Д.** Общая геокриология / Э.Д. Ершов. М., Изд-во Моск. ун-та, 2002, 682 с.
- Пустовойт Г.П.** Учет изменчивости климата при обеспечении надежности оснований сооружений в криолитозоне // Криосфера Земли, 1997, т. I, № 4, с. 50–53.
- РСН 67-87.** Инженерные изыскания для строительства. Составление прогноза измерений температурного режима вечномерзлых грунтов численными методами. Утверждены постановлением Гос. комитета РСФСР по делам строит-ва от 20.08.1987 г. № 152, 678 с.
- Сидняев Н.И.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Н.И. Сидняев. М., ИД "Юрайт", 2011, 310 с.
- Сидняев Н.И., Мельникова Ю.С., Храпов П.В. и др.** Влияние температурного режима криолитозоны на надежность оснований // Пробл. машиностроения и надежности машин, 2012, № 3, с. 81–88.
- Сидняев Н.И., Федотов А.А., Мельникова Ю.С.** Управление распределением температурных полей в криолитозоне // Academia. Архитектура и стр-во, 2010, № 3, с. 372–374.
- Сидняев Н.И., Храпов П.В., Разгуляев С.В.** Обзор и анализ устройств и систем для охлаждения и замораживания грунтов // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. по инженерному мерзлотоведению. Тюмень, Сити-пресс, 2011, с. 156–183.
- Хрусталева Л.Н.** Основы геотехники в криолитозоне / Л.Н. Хрусталева. М., Изд-во Моск. ун-та, 2005, 542 с.
- Хрусталева Л.Н., Медведев А.В., Пустовойт Г.П.** Многолетнее изменение температуры воздуха и устойчивость проектируемых в криолитозоне сооружений // Криосфера Земли, 2000, т. IV, № 3, с. 35–41.
- Цытович Н.А.** Механика мерзлых грунтов / Н.А. Цытович. М., Наука, 1973, 448 с.

Поступила в редакцию
9 февраля 2012 г.