

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНТИНЕНТАЛЬНЫХ ЛЕДНИКОВЫХ ЩИТОВ.

### 2. Сравнительная характеристика\*

**О.О. Рыбак**

*Сочинский научно-исследовательский центр РАН, 354000, Сочи, ул. Театральная, 8а, Россия  
Институт полярных и морских исследований им. А. Вегенера, D-27515, Бремерхафен, ФРГ, Oleg.Rybak@awi.de*

Математические модели ледниковых щитов являются важным инструментом исследования процессов в криосфере Земли. С их помощью стало возможным восстановить процессы роста и распада ледниковых щитов в прошлом и прогнозировать их эволюцию в будущем. В статье анализируются основные типы моделей, разработанные в течение последних лет. Рассмотрены особенности структуры их отдельных блоков, применяемые численные методы и области приложения.

*Ледниковый щит, ледник, математическая модель, Антарктида, Гренландия, палеоклимат*

### MATHEMATICAL MODELS OF THE CONTINENTAL ICE SHEETS.

#### 2. A comparative description

**O.O. Rybak**

*Sochi Scientific Research Center RAS, 354000, Sochi, Teatralnaya str., 8a, Russia  
Alfred Wegener Institute of Polar and Marine Researches, D-27515, Bremerhafen, Germany, Oleg.Rybak@awi.de*

Mathematical models of ice sheets are regarded as important tools for studying the Earth's cryosphere. By means of mathematical modelling one can reconstruct the processes of the growth and the decay of ice sheets in the past and to predict their behaviour in future. In the paper, the main model types, which appeared during the last years are analyzed. Peculiarities of their structure, numerical methods, and the fields of application are discussed.

*Ice sheet, glacier, mathematical model, Antarctica, Greenland, palaeoclimate*

---

*Ice sheet models seriously suffer from a lack of validation.*

R.S.W. van de Wal

### ВВЕДЕНИЕ

Сегодня невозможно представить себе такую область естественных наук, где не применялись бы методы математического моделирования. Гляциология не является исключением. За полвека гляциологические модели эволюционировали от простых механических моделей природных ледниковых объектов до комплексных термомеханических моделей целых ледниковых щитов. Последние выходят за рамки чисто гляциологических моделей, поскольку в той или иной степени включают описание процессов в литосфере, океане и атмосфере.

В части 1 настоящей работы [Рыбак, 2008] были рассмотрены основные принципы построения математических моделей ледниковых щитов, их архитектура, функции отдельных модельных блоков и перспективы их развития. В части 2 мы более подробно остановимся на конструктивных особенностях тех моделей, которые были разработаны и активно использовались в различных приложениях на протяжении последних лет. Из всего многообразия моделей было отобрано три десятка таких, которые, на наш взгляд, могли бы дать представление

об основных направлениях в математическом моделировании ледниковых щитов. При отборе конкретных моделей для настоящего обзора мы руководствовались следующими принципами.

1. Модель должна описывать ледниковый щит целиком либо значительную его часть (например, Западно-Антарктический щит как часть всего Антарктического щита). Поэтому модели горных ледников не попали в настоящий обзор, хотя многие из них построены исходя из тех же базовых принципов, что и модели ледниковых щитов.

2. Отбирались только 3-мерные или проинтегрированные 2-мерные модели (иногда называемые 2,5-мерными).

3. Работы, в которых описаны модели и результаты экспериментов с ними, должны быть опубликованы в период 1992–2007 гг.

Таким образом, в поле нашего зрения не попадают модели одно- и двумерные, которые в настоящее время применяются в основном для исследования специфических процессов и которые можно отнести, скорее, к схематическим или концептуаль-

---

\* Часть 1 опубликована в журнале "Криосфера Земли", 2008, т. XII, № 1, с. 12–23.

Таблица 1. Математические модели ледниковых щитов, рассмотренные в настоящей работе

№ п/п	Модель	Источник	Номер группы	Работы после 2000 г.	Организация
1	2	3	4	5	6
1	H1	[Huybrechts, 2002]	1	Да	Alfred-Wegener-Institut für Polar und Meeresforschung, Bremerhaven, Germany; Vrije Universiteit Brussel, Brussels, Belgium
2	H2	[Huybrechts, 2002]			
3	HZ	[Zweck, Huybrechts, 2005]			
4	HN	[Huybrechts et al., 2007]			
5	R1	[Ritz et al., 2001]	2	Да	Laboratoire de glaciologie et de géophysique de l'environnement, Université Joseph Fourier, Saint Martin d'Hères, France
6	G-1	[Ritz et al., 1997]			
7	G-2	[Charbit et al., 2005]			
8	AO	[Abe-Ouchi, 1993]	3	Да	Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Switzerland
9	P1	[Ritz, 1997]	4	Да	Bristol Glaciology Centre, University of Bristol, United Kingdom
10	P2	[Payne, 1999]			
11	PT	[Takeda et al., 2002]			
12	TP1	[Tarasov, Peltier, 2003]	5	Да	University of Toronto, Canada
13	TP2	[Tarasov, Peltier, 1997]			
14	S-1	[Calov et al., 1998]	6	Да	Technische Universität Darmstadt, Germany
15	S-2	[Greve et al., 1998]			
16	S-3	[Greve et al., 1999b]			
17	S-4	[Greve, 2000]			
18	S-NG	[Greve et al., 1999a]			
19	S-NA	[Savvin et al., 2000]			
20	M1	[Marshall, Clarke, 1997]	7	Да	University of British Columbia, Vancouver, Canada
21	M2	[Marshall, Cuffiy, 2000]			
22	W1	[Van de Wal, 1999]	8	Да	Institute for Marine and Atmospheric Research, Utrecht University, Netherlands
23	WB	[Bintanja et al., 2002]			
24	PC	[Pollard et al., 2005]	9	Да	Earth and Environmental Systems Institute, Pennsylvania State University, USA
25	B1	[Budd et al., 1994]	10	Нет	Antarctic Cooperative Research Centre, Hobart, Tasmania Australia
26	VS	[Verbitsky, Salzman, 1997]	11	Нет	Yale University, New Haven, USA
27	F1	[Fastook, Prentice, 1994]	12	Нет	University of Maine, Orono, USA
28	F2	[Fastook, Holmlund, 1994]			
29	MA1	[Ritz, 1997]	13	Нет	University of Chicago, USA
30	MA2	[Hulbe, MacAyeal, 1999]			

ным (например, двумерные модели [Vieli, Payne, 2005; Pattyn et al., 2006], предназначенные для изучения миграции линии налегания), и трехмерные модели также концептуального характера, в которых реконструируется динамика абстрактных ледниковых щитов и цель которых обычно состоит в отработке тех или иных численных методов [Saito, Abe-Ouchi, 2005; Price et al., 2007]. Основные характеристики отобранных нами моделей приведены в табл. 1–3. В разд. 1 анализируемые в работе модели сгруппированы по признаку, который можно условно назвать генетическим в соответствии с тем, где или кем первоначальные версии моделей были разработаны. В разд. 2 перечислены признаки, присутствующие всем современным моделям, в разд. 3–6 рассмотрены конструкционные особенности отдельных моделей, различия в подходах к методам описания основных физических процессов и методов решения.

## 1. ГРУППИРОВКА МОДЕЛЕЙ ПО ГЕНЕТИЧЕСКОМУ ПРИЗНАКУ

Все тридцать моделей, которые анализируются в настоящей работе, мы сгруппировали по признаку либо места (университет, институт и т. д.), где первоначальные версии моделей были разработаны, либо по признаку авторства той или иной модели. Это сделано с единственной целью выяснить, сколько из рассмотренных трех десятков моделей можно считать аутентичными, разработанными независимо друг от друга. Дело в том, что некоторые модели представляют собой версии одной и той же первоначальной модели, приспособленные для решения конкретной задачи. Однако, поскольку различия в версиях моделей отражают особенности описания физических процессов в конкретных объектах (при этом меняется структура модели, иногда методы решения уравнений,

Таблица 2. **Общая характеристика моделей ледниковых щитов**

№ п/п	Модель	Объект	Разрешение*	Модельные блоки	Э/С	Метод
1	2	3	4	5	6	7
1	H1	A	20×20×30	Л1, ШЛ, ЛН, ГИ, О, К	Э	КР
2	H2	Г	20×20×30	Л1, ЛН, ГИ, О, К	Э	КР
3	HZ	П	50×50×17	Л1, И, О, К	Э	КР
4	HN	A	20×20×30 (Л1) 2,5×2,5×101 (Л2)	Л1, Л2, ШЛ, ЛН, ГИ, О, К	Э	КР
5	R1	A	40×40×21	Л1, ШЛ, ЛП, ГИ, О, К	Э	КР
6	G-1	Г	40×40×21	Л1, ГИ, О, К	Э	КР
7	G-2	П	45×45×21	Л1, ГИ, К	Э	КР
8	АО	Г	10×10×92, 20×20×92	Л1, ГИ, О, К	Э	КР
9	P1	Г	$n \times n \times n$	Л1, ГИ, О, К	Э	КР
10	P2	ЗА	20×20× $n$	Л1, К	С	КР
11	PT	A	20×20× $n$	Л1, К	С	КР
12	TP1	Г	сфер. крд. <sup>2</sup> , 0,5°×0,25°×65	Л1, ГИ, К	Э	КР
13	TP2	П	сфер. крд. <sup>2</sup> , 0,5°×0,5°, верт.-инт. <sup>3</sup>	Л1, ГИ, О, К	Э	КР
14	S-1	A	109×109×(11, 51) <sup>1</sup>	Л1, ГИ, О, К	Э	КР
15	S-2	Г	40×40×(11, 51) <sup>1</sup> , 20×20×(11, 51) <sup>1</sup>	Л1, ГИ, К	Э	КР
16	S-3	П	80×80×21	Л1, ГИ, О, К	Э	КР
17	S-4	М	20×20×(11, 51) <sup>1</sup>	Л1, ГИ, К	Э	КР
18	S-NG	Г	40×40×(11, 51) <sup>1</sup> (Л1) 4×4×(11, 51) <sup>1</sup> (Л2)	Л1, Л2, ГИ, О, К	Э	КР
19	S-NA	A	109×109×(11, 51) <sup>1</sup> (Л1) 10,9×10,9×(11, 51) <sup>1</sup> (Л2)	Л1, Л2, ГИ, О, К	Э	КР
20	M1	П	сфер. крд. <sup>3</sup> × $n$	Л1, ЛП, К	С	КР
21	M2	Г	20×20×20	Л1, ГИ, К	Э	КР
22	W1	Г	20×20×10	Л1, ГИ, К	Э	КР
23	WB	П	20×20×10	Л1, ШЛ, ГИ, О, К	Э	КР
24	PC	ВА	40×40×10	Л1, ПТ, ГИ, О, К	Э	КР
25	B1	A	20×20×30	Л1, ШЛ, О, К	Э	КР
26	VS	A	40×40, верт.-инт. <sup>3</sup>	Л1, ГИ, О, К	Э	КР
27	F1	П	ч-эл-ты <sup>4</sup> , 1403, верт.-инт. <sup>3</sup>	Л1, К	Э	КЭ
28	F2	A	ч-эл-ты <sup>4</sup> , 1316, верт.-инт. <sup>3</sup>	Л1, К	Э	КЭ
29	MA1	Г	т-эл-ты <sup>5</sup> , $n \times n$	Л1, К	Э	КЭ
30	MA2	ЗА	т-эл-ты <sup>5</sup> , 1664×21	Л1, ШЛ, О, К	С	КЭ

\* Горизонтальное разрешение в км, вертикальное – количество слоев.

<sup>1</sup> Количество вертикальных слоев указано отдельно для “теплого” и “холодного” льда.

<sup>2</sup> Сфер. крд. – сферические координаты.

<sup>3</sup> Верт.-инт. – вертикально проинтегрированная.

<sup>4</sup> Ч-эл-ты – четырехугольные элементы.

<sup>5</sup> Т-эл-ты – треугольные элементы.

**Примечание.** Объект моделирования: А – Антарктида в целом, ЗА – Западно-Антарктический щит, ВА – Восточно-Антарктический щит, Г – Гренландия, П – палеощиты Северного полушария (по отдельности: Лаврентийский, Фенно-Скандинавский и др., или все вместе), М – полярный ледниковый купол Марса. Модельные блоки: Л1 – SIA ледниковый щит, Л2 – встроенный (nested) блок, ШЛ – шельфовый ледник, ЛН – линия налегания, ЛП – ледниковый поток, ГИ – гляциоизостазия, К – климат, О – океан; Э/С: Э – эволюционная модель, С – стационарная модель;  $n$  – информация отсутствует. Метод: КР – конечно-разностный, КЭ – конечно-элементный.

пространственная и временная дискретизация и т. д.), мы посчитали целесообразным рассматривать их как разные модели.

В табл. 1 в первой графе указана сплошная нумерация. Порядок перечисления моделей в дальнейшем сохранен в табл. 2, 3. Во второй графе дано краткое имя для каждой модели, в третьей – ссылка на источник. Ссылка на источник фиксирует со-

стояние (конструкционные особенности) модели на момент опубликования работы. Поясним на примерах. Антарктическая версия модели Хёбрехтса впервые была представлена в цикле работ в конце 80-х–начале 90-х гг. [Huybrechts, Oerlemans, 1988; Huybrechts, 1990]. Окончательная формализация была сделана в работе [Huybrechts, 1992], и модель приобрела законченный на том этапе вид. Значи-

Таблица 3. Особенности строения модельных блоков

№ п/п	Модель	Температурный форсинг	Скорость аккумуляции	Скорость абляции	Взаимодействие щита с океаном	Изоэстатическая модель	Поток геотермического тепла
1	2	3	4	5	6	7	8
1	H1	ПТ+И	ПТ	–	УМ, ТШ	EL+DA	П
2	H2	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	EL+DA	П
3	HZ	ПТ+GCM	ПТ+GCM	PDD	УМ	EL+DA	П
4	HN	ПТ+И	ПТ	–	УМ, ТШ	EL+DA	П
5	R1	ПТ+И	ПТ	–	УМ, ТШ, ОА	EL+RA	П
6	G-1	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	EL+RA	П
7	G-2	MRC	MRC	PDD	–	EL+RA	П
8	АО	ПТ+С	ПТ	PDD	УМ	LL+RA	П
9	P1	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	<i>n</i>	П
10	P2	ПТ	Н	–	–	–	П
11	PT	ПТ	Н	–	–	–	П, М
12	TP1	ПТ+И	ПТ	PDD	–	SSMM	М
13	TP2	ЕВМ	ПТ	PDD	УМ	LL+RA	М
14	S-1	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	LL+RA	П
15	S-2	ПТ+И	ПТ	PDD	–	LL+RA	П
16	S-3	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	LL+RA	П
17	S-4	Инв	Инв	Инв	–	LL+RA	П
18	S-NG	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	LL+RA	П
19	S-NA	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	LL+RA	П
20	M1	ПТ	–	–	–	–	<i>n</i>
21	M2	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ, ОА	LL+RA	П
22	W1	ЕВМ+И	ПТ	PDD	–	LL+RA	П
23	WB	GCM+ПТ+И	ПТ	ПАб	УМ, ОА	EL+RA	П
24	PC	GCM	GCM	PDD	УМ	LL+RA	М
25	B1	GCM	GCM	GCM	УМ, ТШ, ОА	–	П
26	VS	ПТ+И	ПТ	PDD	УМ	LL+RA	П
27	F1	ПТ	ПТ	PDD	–	–	–
28	F2	ПТ	ПТ	PDD	–	–	–
29	MA1	ПТ	ПТ	PDD	–	–	<i>n</i>
30	MA2	Н	ПТ	–	УМ	–	П

Примечание. Методы, графы 3–5: И – форсинг с помощью изотопных рядов, ПТ – параметризация, ЕВМ – энергетическая модель, GCM – использование “временных срезов”, генерируемых моделями общей циркуляции атмосферы, MRC – генерирование эволюции климата упрощенной климатической моделью, С – сценарий, Н – данные наблюдений, PDD – подсчет градусо-дней с положительными температурами, ПАб – параметризация абляции на основе расчета радиационного баланса, Инв – метод инверсии; графа 6: УМ – изменения уровня моря, ТШ – таяние шельфового льда, ОА – откалывание айсбергов; графа 7: обозначения в соответствии с [LeMeur, Huybrechts, 1996]: LL – Local lithosphere, EL – Elastic lithosphere, DA – Diffusive asthenosphere, RA – Relaxed asthenosphere [Рыбак, 2008], SSMM – Spherically symmetric Maxwell model of the Earth [Tarasov, Peltier, 2003]; графа 8: П – постоянный, М – меняющийся в пространстве; *n* – информация отсутствует, “плюс” – комбинация методов, “минус” – процесс в модели не описан.

тельные изменения были внесены несколькими годами позднее [Huybrechts, de Wolde, 1999], после чего на ее основе были разработаны версии для исследования эволюции Антарктического щита в течение нескольких гляциально-межгляциальных циклов [Huybrechts, 2002], для построения на ее основе модели региональной динамики [Рыбак и др., 2007; Huybrechts et al., 2007] и т. д. Из той же ранней версии модели [Huybrechts, 1992] берет начало модель Гренландского щита [Huybrechts, 1996], которая в дальнейшем также подвергалась модернизации и послужила основой для построения моде-

ли палеооледенения Северного полушария [Zweck, Huybrechts, 2005]. Аналогичные метаморфозы происходили с моделью SICOPOLIS. Ранние версии [Calov, 1994; Greve, 1995], разработанные как модели Гренландии, мало отличались друг от друга. В дальнейшем на их основе были созданы антарктическая и палеоверсии, модель полярного ледникового купола на Марсе. В настоящее время модели развиваются практически независимо друг от друга.

Нумерация выделенных групп моделей дана в четвертой графе табл. 1. Всего их оказалось 13, из которых первые девять активно используются в

течение последних лет (есть публикации в 2001–2007 гг., что отражено в пятой графе). В шестой графе указано название организации (организаций), с которой более всего данная группа моделей может быть ассоциирована. “Географическая” привязка в данном случае достаточно условна из-за мобильности самих исследователей. Кроме того, зачастую менялся и авторский состав разработчиков, хотя все они в то или иное время работы с моделью указывали в качестве аффилиации один и тот же институт (например, случай с моделью SICOPOLIS и ее версиями № 11–16). География использования конкретной модели также далеко не всегда совпадает с географией разработки, она гораздо шире в связи с межинститутской и международной кооперацией.

## 2. ОБЩИЕ ЧЕРТЫ В СТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ

### 2.1. Блочная архитектура

Сам предмет описания – покровное оледенение – природный объект, посредством множества прямых и обратных связей “встроенный” в земные оболочки – атмосферу, литосферу, океан, предопределяет блочную структуру математических моделей. Это придает моделям гибкость в том смысле, что в зависимости от той или иной решаемой задачи можно добавлять или убирать любые блоки либо вносить изменения в каждый блок в отдельности. Следствием гибкости является универсальность моделей. Так, модель SICOPOLIS в различных версиях использовалась для моделирования ныне существующих щитов Гренландии (S-2, S-NG) и Антарктиды (S-1, S-NA), палеощитов (S-3) и полярного ледникового купола на Марсе (S-4).

Оставив в стороне “технические” блоки ввода и вывода информации (см. рис. 1 в [Рыбак и др., 2007]), которые, разумеется, присутствуют в каждой модели, мы обнаружим, что любая из трех десятков моделей содержит по крайней мере два блока – блок собственно ледникового щита Л1 и климатический (атмосферный) блок К (см. табл. 2).

В блоке ледникового щита описывается процесс растекания льда под действием гравитации, в климатическом блоке – поле температуры воздуха и баланс массы на поверхности щита – разница между приходом за счет выпадения твердых атмосферных осадков (аккумуляции) и расходом за счет таяния (абляции). Баланс массы на нижней границе щита определяется скоростью базального таяния и рассчитывается в блоке подстилающих пород, который не всегда включается в модель. Посредством механизмов аккумуляции и абляции осуществляется связь между ледниковым щитом и климатическими вариациями.

### 2.2. Прогностическое уравнение

Во всех моделях ледниковых щитов локальное изменение толщины льда описывается как сумма

двух составляющих – горизонтальной дивергенции потока льда и баланса массы (см. разд. 2.1):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}_h H) + M_s - M_b, \quad (1)$$

где  $H$  – толщина льда;  $\mathbf{v}_h$  – вектор горизонтальной скорости;  $M_s$ ,  $M_b$  – баланс массы на поверхности щита (см. разд. 5.1) и на нижней границе щита (см. разд. 5.3).

### 2.3. Аппроксимация мелкого льда

В начале эры современных моделей было не вполне ясно, какие компоненты должны быть включены в баланс сил при описании динамики щитов в целом [Jenssen, 1977]. Для описания динамики трехмерного нестационарного ледника (или ледникового щита) был предложен метод тонкого пограничного слоя, позволивший упростить описание растекания льда в тех случаях, когда кривизной его поверхности и ложа можно пренебречь [Григорян, Шумский, 1975]. Позднее была разработана теория мелкого льда (Shallow Ice Approximation – SIA [Hutter, 1983]), из которой, в частности, следует, что для описания крупномасштабных процессов достаточно уравновесить градиенты тангенциальных напряжений градиентами высоты щита. Исключая из баланса сил градиенты продольных нормальных и поперечных тангенциальных напряжений, удалось существенно упростить вычислительный аппарат и сократить расходы машинного времени для расчетов. Вместе с тем SIA накладывает ограничения на пространственное разрешение моделей. Пространственный шаг и локальная толщина льда должны соотноситься приблизительно как 1:10. Таким образом, хотя макроописание эволюции щитов в рамках SIA вполне адекватно реальности, однако за рамки возможностей SIA выходит адекватное описание динамики отдельных областей щитов, таких как ледоразделы, области вблизи линии налегания и на окраинах щитов. Ограничения в пространственном разрешении не позволяют учесть влияние сложной топографии подстилающей поверхности на поле скоростей растекания льда. Собственно, уже для описания динамики шельфового льда и переходной зоны между ледниковым щитом и шельфовым ледником приходится отходить от описания динамики в рамках SIA.

### 2.4. Термомеханическое сопряжение

Все современные модели в своей основе содержат представление о ледовой массе как о неньютоновской жидкости, чья вязкость зависит от температуры нелинейно. За исключением специальных условий некоторых экспериментов, скорость деформации льда в моделях определяется законом Глена [Glen, 1952], связывающим напряжения со скоростями деформации.



### 3. РАЗЛИЧИЯ В СТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ

Различия в строении моделей обусловлены главным образом отличием изучаемых объектов друг от друга, а также конкретными задачами исследований, для которых разрабатывались те или иные модели. Наиболее простые модели состоят всего из двух блоков: Л1 и К (P2, PT, F1, F2). За исключением модели SICOPOLIS и ее версий (см. табл. 1–3, № 14–19), во всех моделях в блоке Л1 лед считается “холодным”, температура его находится ниже точки плавления. В модели SICOPOLIS рассмотрены два состояния льда: “холодный” и “теплый”, т. е. находящийся при температуре плавления и содержащий некоторое количество воды.

Задачи, решаемые в ходе численных экспериментов, могут быть стационарными (С) или нестационарными (Э). В последних реконструируется эволюция щитов на протяжении десятков и сотен тысяч лет в прошлом или прогнозируется их будущее состояние. Большинство моделей включает блок подстилающих пород, в рамках которого описывается поток геотермического тепла, а также расчет реакции земной коры на меняющуюся массу ледникового щита (гляциоизостазия – ГИ). При этом конкретная схема расчета меняется от одной группы моделей к другой или даже внутри группы (TP1 и TP2). Классификация изостатических субмоделей в табл. 3 дана в соответствии с работой [Le Meur, Huybrechts, 1996].

Поскольку расход льда через боковые границы щитов происходит в основном через выводные потоки [Bamber et al., 2000], авторы моделей M1 и R1 посчитали целесообразным выделить отдельные блоки для их расчета.

Положение линии налегания рассчитывается исходя из критерия плавучести, однако только в моделях 1, 3 и 4 процесс ее миграции описан в отдельном блоке (ЛН), который охватывает узкую переходную зону на внешней границе континентального оледенения [Рыбак, 2008].

Модели HN, S-NG и S-NA включают отдельные блоки, в которых описывается региональная динамика льда (nested-модели). Поскольку ограничения, которые накладывает SIA на пространственное разрешение модели, не позволяют описывать мелкомасштабные особенности поля растекания льда, то для увеличения разрешения используются уравнения движения, включающие помимо градиентов тангенциальных напряжений в вертикальной плоскости также градиенты нормальных напряжений и тангенциальных напряжений в горизонтальной плоскости (подробнее см. [Рыбак, 2008]). Структура указанных моделей такова, что область интегрирования разбивается на два домена – крупномасштабный и мелкомасштабный. SIA-модель описывает эволюцию щита во всей области (блок

Л1), а динамика в ограниченном регионе (блок Л2) описывается моделями с более высокой степенью аппроксимации уравнения баланса сил.

### 4. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ И ВРЕМЕННОЕ РАЗРЕШЕНИЕ

Большинство рассмотренных моделей трехмерные. Исключение составляют модели TP2, VS, F1, F2: в них фигурируют проинтегрированные по вертикали поля скорости и температуры льда. Такие модели обычно называют 2,5-мерными.

Горизонтальное разрешение моделей Антарктиды и Гренландии 20–40 км, несколько большее разрешение у моделей палеощитов. Горизонтальное разрешение в региональных доменах nested-моделей может быть на порядок меньше и сопоставимо с локальной толщиной льда. В TP1, TP2, M1 использованы сферические координаты. Вертикальное разрешение в большинстве трехмерных моделей – 20–30 слоев. Как правило, узлы расположены неравномерно по вертикальной оси, уплотняясь ко дну. Это делается для того, чтобы учесть с максимальным правдоподобием особенности деформации льда в теле щита, которые сосредоточены в основном в нижней его части. Вертикальная координата у всех без исключения рассмотренных трехмерных моделей безразмерная. Формулы для преобразования уравнений и граничных условий к криволинейным координатам приведены, например, в [Pattyn, 2003].

Временной шаг для решения уравнения (1) на практике ограничен условием термомеханического сопряжения, т. е. взаимным приспособлением полей толщины температуры льда (см. разд. 6.2), и, как правило, невелик (1–10 лет, реже – меньше 1 года). Временная дискретизация для решения (1) задает масштаб для остальных переменных. Так, в H1 и HN основной шаг – 1 год, температура и скорость растекания льда рассчитываются каждые 20 лет, реакция литосферы – каждые 100 лет.

### 5. ПРОЦЕССЫ НА ВНЕШНИХ ГРАНИЦАХ

#### 5.1. Интерфейс с атмосферой: температура воздуха и баланс массы

Изменение поля температуры на внешних границах щита управляет его эволюцией главным образом через механизм изменения баланса массы на поверхности. В 3-мерных моделях температура на границах определяет также и поле внутри массы льда, оказывая тем самым влияние на механические свойства льда и в конечном счете на скорость растекания. Пространственное распределение температуры может быть основано на параметризационных схемах, связывающих ее с географическими координатами и абсолютной высотой. Эволюция температуры на внешней границе (блок К) описы-

вается, как правило, одним из приведенных ниже основных способов или их комбинацией.

1. Применение изотопных рядов (И). Температура воздуха у нижней границы атмосферы считается равной температуре поверхности ледникового щита. Оценки температуры воздуха в прошлом получают путем пересчета изотопного состава льда (рядов  $\delta^{18}\text{O}$  или  $\delta\text{D}$ ), который пропорционален температуре воздуха у верхней границы термической инверсии в момент формирования осадков [Robin, 1977].

2. Применение современных значений температуры льда в скважине.

3. Энергобалансовые модели (ЕВМ). В ЕВМ рассчитывается температура воздуха как функция инсоляции, которая определяется главным образом колебанием орбитальных параметров Земли. Так, в ТР2 использованы алгоритмы классической двумерной сезонной энергобалансовой модели [North et al., 1983], которая включает реалистическое описание контуров континентов и верхний перемешанный слой океана, а в W1 – локальная ЕВМ, воспроизводящая суточный цикл, что дает возможность использовать ее в параметризационной схеме для расчета количества дней с положительной температурой (см. ниже).

4. Сценарии (заданные изменения температуры в будущем – С) и “временные срезы”. Атмосферные модели в силу очень малого шага по времени технически не могут быть интегрируемы в течение десятков (сотен) тысяч лет. Поэтому их используют для реконструкции климатических условий для определенных моментов времени в прошлом – “временных срезов”. “Временные срезы” моделей общей циркуляции атмосферы (General Circulation Models – GCM) или упрощенных климатических моделей (Models of Reduced Complexity – MRC) применяются, как правило, в двух случаях: 1) для реконструкции палеоатмосферы, особенно когда одна из целей эксперимента – глубже исследовать взаимодействие атмосферы и ледникового щита; 2) для построения проекции будущего состояния ледникового щита в результате прогнозируемого изменения глобальной температуры воздуха.

Отметим, что из-за частого несоответствия наблюдаемых и модельных полей температуры воздуха энергобалансовые модели, GCM и MRC используются, как правило, для расчета не абсолютных значений палеотемпературы (или проекций температуры в будущем), а аномалий (отклонений модельных прошлых или будущих значений от модельных же современных значений), которые накладываются на современные наблюдаемые значения полей  $H$ , пространственное разрешение которых может быть выше модельных полей (ТР2).

Для расчета скорости аккумуляции в большинстве моделей используются схемы параметризации (ПА), основанные на зависимости количе-

ства осадков от температуры воздуха. Скорость аккумуляции (или ее аномалии) также может рассчитываться непосредственно в GCM (РС и В1) или MRC (G-2) либо браться из данных наблюдений. Используемый лишь в S-4 метод инверсии заключается в подгонке баланса массы под заданную топографию щита, находящегося в стационарном состоянии. Скорость абляции (актуальная для Гренландии и палеощитов Северного полушария, хотя иногда формально включаемая и в антарктические модели) рассчитывается через количество градусо-дней с положительными температурами (PDD).

## 5.2. Интерфейс с океаном

Содержание океанического блока (О) может меняться от модели к модели. Как правило, в нем отражены следующие механизмы воздействия океана на ледниковый щит.

1. Изменение уровня моря (УМ), которое обуславливает миграцию линии налегания. Понижение уровня моря во время гляциальных фаз за счет аккумуляции континентальных масс льда приводило к тому, что покровное континентальное оледенение распространялось на территорию шельфа. Поэтому колебания уровня Мирового океана являются наряду с вариациями температуры основным механизмом, обуславливающим изменение площади и объема моделируемых ледниковых объектов. Соответствующие временные ряды рассчитываются путем пересчета изотопного состава материала из кернов морских донных осадков [Imbrie et al., 1984; Bassinot et al., 1994] в изменения уровня моря. В качестве реперных точек берутся, например, косвенным образом установленные отметки +6 м ~ 122 тыс. лет назад (предыдущее межледниковье) и –30 м ~ 18 тыс. лет назад (последний ледниковый максимум) [Chappel, Shackleton, 1986].

2. Изменения температуры вод, обменивающихся теплом с нижней границей шельфового льда, обуславливают его таяние (ТШ). Таяние базального льда на шельфе – комплексный процесс, который зависит от величины летнего прогрева вод океана, длительности периода, когда отсутствует морской лед, термохалинных свойств водных масс и особенностей циркуляции шельфовых вод. Расчет ее сводится, как правило, к параметрическим выражениям (Н1, НН, R1). Поскольку точное соотношение между изменениями климата, циркуляцией океана и скоростью базального таяния неизвестно, в моделях используются разного вида допущения, как, например, в Н1 и НН: скорость таяния сокращается на 20 % на каждый градус падения температуры воздуха. Это соответствует сокращению на 15 % современного значения скорости таяния для характерных 10-градусных гляциально-межгляциальных вариаций. Заметим, что блок шельфовых ледников (ШЛ), как правило, исключают из моделей Гренландии и часто – из моделей палеощитов.

Описание откалывания айсбергов (А), присутствующее в некоторых моделях (R1 и др.) не относится к механизмам воздействия океана на ледниковый щит, так как лишь указывает на вероятную границу распространения шельфовых льдов и не влияет на их динамику, будучи диагностической величиной.

### 5.3. Интерфейс с литосферой

Интерфейс с литосферой описывает теплообмен подстилающих пород и ледникового щита (при этом на нижнюю границу подстилающих пород подается поток геотермического тепла) и гляциоизостатические колебания.

Модельный поток геотермического тепла (ПГТ) постоянен в пространстве в большинстве моделей, так как его пространственные вариации под ледниковыми щитами известны плохо. Исключения составляют антарктические модели РТ и РС и гренландская модель TR1, в которых ПГТ представляет собой поле, описанное, впрочем, достаточно схематично. Вместе с тем для исследования чувствительности модели к вариациям ПГТ, а также для нахождения ПГТ, при котором начинается базальное таяние, прибегают к варьированию постоянного в пространстве значения ПГТ (S-4).

Отсутствие описания гляциоизостазии означает, что модель используется для постановки экспериментов, имеющих целью воспроизвести текущее состояние ледникового щита, его недалекое прошлое или будущее. Иными словами, временной интервал таких экспериментов должен быть меньше характерного времени отклика земной коры на изменение массы щита. Другая причина отсутствия изостатического блока – стремление упростить модель в тех случаях, когда главная цель работы – прежде всего отладка методов вычислений в блоке ледникового щита (F1, F2), а не реалистичность реконструкций.

## 6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

### 6.1. Конечные разности и конечные элементы

Следующая разделяющая все модели черта находится между моделями, использующими конечно-элементный (КЭ) и конечно-разностный (КР) методы для решения модельных уравнений. За исключением MA1, MA2, F1 и F2, во всех рассматриваемых моделях реализован конечно-разностный подход, который, по-видимому, является более экономичным с точки зрения затрат ресурсов компьютеров. В MA1 и MA2 используются треугольные элементы, в F1 и F2 – четырехугольные. Отметим, что указанные четыре модели нацелены на решение узких задач, и в их рамках невозможно реконструировать эволюцию щитов в течение длительного модельного времени. Все действительно “эволюционные” модели используют конечные раз-

ности. По нашему мнению, метод конечных элементов найдет применение в дальнейшем при решении задач динамики льда на окраинах щитов, особенно моделирования быстрых выводных потоков, а также для детального описания процесса миграции линии налегания.

### 6.2. Нелинейная диффузия

Ниже речь пойдет только о моделях, в которых для численного решения используются конечные разности. Правая часть уравнения (1) содержит член, описывающий нелинейную диффузию  $-\nabla \cdot (\mathbf{v}_h H)$ . Он может быть записан как  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{F} = -D\nabla H$  – горизонтальный поток льда;  $D$  – коэффициент диффузии. Следовательно, уравнение (1) может быть записано как  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \cdot (D\nabla H) + M_s - M_b$ . Схемы расчетов  $D$  и  $\mathbf{F}$  различаются в зависимости от того, что, по мнению авторов, являлось приоритетным – точность или расход машинного времени. В работе [Hindmarsh, Payne, 1996] рассмотрены три способа дискретизации  $-\nabla \cdot (D\nabla H)$ , различающиеся по способу расчета  $D$ :

- 1) на сетке, смещенной относительно обеих горизонтальных осей (т. е. в центре ячейки, в точках  $i+1/2, j+1/2$ , где  $i, j$  – индексы по осям  $x$  и  $y$  соответственно);
- 2) на сетке, смещенной относительно каждой из осей, в точках  $i, j+1/2$  и  $i+1/2, j$ ;
- 3) в узлах основной сетки, в точках  $i, j$ .

Поток  $\mathbf{F} = -D\nabla H$  во всех трех случаях рассчитывается в узлах смещенной сетки. Все три способа консервативны, однако первые два берут данные из 9 окружающих узлов, а третий – из 13 узлов. В большинстве моделей используется третий способ, позволяющий делать большие шаги по времени по сравнению с первым и вторым.

### 6.3. Численные методы

Описание численных методов, вообще говоря, не всегда легко доступно. Отметим, что в некоторых случаях модели разрабатывались в ходе подготовки диссертаций, и если общее описание и результаты решения тех или иных задач публиковались в международных реферируемых журналах, то численные методы (тем более модельные коды) описывались зачастую непосредственно в диссертациях (иногда одного из соавторов, как в поздней модификации модели Бадда [Budd et al., 1994]) либо в малотиражных или институтских изданиях [Huybrechts, 1992; Greve, 1995].

Как уже было упомянуто, подавляющее большинство моделей в численных расчетах использует конечные разности. Спектр применяемых численных методов не очень широк. Подавляющее большинство алгоритмов решения прогностических



уравнений для толщины щита и температуры основано на неявных и полунеявных схемах, обеспечивающих устойчивость решения. Исключение составляет модель АО, в которой применена явная схема. В группе моделей Хёбрехтса (табл. 1, № 1–4) и SICOPOLIS (№ 14–19) решение находится с помощью метода переменных направлений, в R1 – методом точечной релаксации, в РТ – методом сопряженных градиентов. Для расчета горизонтальных компонент скорости растекания льда во встроеной области (HN) используется метод сопряженных градиентов, а на шельфе – метод точечной релаксации (H1, HN) или метод исключений Гаусса (R1).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математические модели ледниковых щитов превратились в эффективный инструмент палеореконокструкций климата и в более широком смысле – прошлых состояний окружающей среды на планете. Без них сегодня также невозможно представить разработку вероятных сценариев развития климатической системы. Модели ледниковых щитов по своей природе синтезируют процессы в криосфере, литосфере и климатической системе Земли. Универсальность подходов к моделированию заключается в том, что внесение незначительных изменений в формулировку модели позволяет воспроизводить динамику различных ледниковых объектов. В настоящей работе мы показали общие черты, характерные для всех моделей и более подробно остановились на различиях в строении отдельных модельных блоков, а также на особенностях численных методов.

Применение математических моделей объективно затрудняется тем, что некоторые ключевые параметры могут быть оценены лишь косвенно или вообще быть неизвестны. Прежде всего, речь идет о таких характеристиках, как поток геотермического тепла, прямые измерения которого под ледниковыми щитами не проводились, или параметры, входящие в параметризационные схемы для базального скольжения, климатического форсинга и др. Разумеется, прямая проверка (или непосредственное измерение) подобных параметров или значений природных полей затруднена или невозможна. В модельных экспериментах в связи с этим часто прибегают к разного рода ограничениям (constraints), следующим из косвенной информации об исследуемых процессах.

Заметим, что в последние годы наметилась тенденция к большей открытости моделей, к алгоритмам и модельным кодам, которые становятся общедоступными через Интернет. Примером может служить модель GLIMMER (<http://glimmer.forge.pesc.ac.uk/>), которая фактически является обобщенной версией моделей P1 и P2. По нашему мнению, стремление к большей открытости сохранится в связи с расширением области применения моде-

лей, появлением новых и развитием старых версий. Сопоставление результатов моделирования требует, чтобы алгоритмы расчетов (или даже модельные коды) были общедоступными, а результаты могли быть проверены научным сообществом.

Следует отметить, что область математического моделирования ледниковых щитов бурно развивается, а настоящая работа описывает ее состояние на 2007 г.

### Литература

- Григорян С.С., Шумский П.А.** Простейшая математическая модель трехмерного нестационарного ледника // Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1975, № 42, с. 43–53.
- Рыбак О.О.** Математические модели континентальных ледниковых щитов. 1. Архитектура моделей // Криосфера Земли, 2008, т. XII, № 1, с. 12–23.
- Рыбак О., Хёбрехтс Ф., Паттэн Ф., Штайнхаге Д.** Региональная модель динамики льда. Часть 1. Описание модели, постановка численного эксперимента и современная динамика потока в окрестностях станции Конен // Материалы гляциол. исслед., 2007, вып. 102, с. 3–11.
- Abe-Ouchi A.** Ice sheet response to climatic changes: a modelling approach // Zürich. Geograph. Schriften, 1993, vol. 54, p. 1–134.
- Bamber J.L., Vaughan D.B., Joughin J.** Widespread complex flow in the interior of the Antarctic Ice Sheet // Science, 2000, vol. 287, p. 1248–1250.
- Bassiot F.C., Labeyrie L.D., Vincent E. et al.** The astronomical theory of climate and the age of the Bruhnes-Matuyama magnetic reversal // Earth and Planet. Sci. Lett., 1994, vol. 126, p. 91–108.
- Bintanja R., Van de Wal R.S.W., Oerlemans J.** Global ice volume variations through the last glacial cycle simulated by a 3-D ice-dynamical model // Quatern. Intern., 2002, vol. 95, p. 11–23.
- Budd W.F., Janssen D., Mavraklis E., Coustts B.** Modelling of the Antarctic ice-sheet changes through time // Ann. Glaciol., 1994, vol. 20, p. 291–297.
- Calov R.** Das thermomechanische Verhalten des grönländischen Eisschildes unter der Wirkung verschiedener Klimaszenarien – Antworten eines theoretisch-numerischen Modells // Physica D. Thesis. Darmschtadt, Inst. Mechanik, Techn. Hochschule, 1994, 171 p.
- Calov R., Savvin A., Greve R. et al.** Simulation of the Antarctic ice sheet with a three-dimensional polythermal ice-sheet model, in support of the EPICA project // Ann. Glaciol., 1998, vol. 27, p. 201–206.
- Chappell J., Shackleton N.J.** Oxygen isotopes and sea level // Nature, 1986, vol. 324, p. 137–140.
- Charbit S., Kageyama M., Roche D. et al.** Investigating the mechanisms leading to the deglaciation of past continental northern hemisphere ice sheets with the CLIMBER-GREMLINS coupled model // Global and Planet. Change, 2005, vol. 48, p. 253–273.
- Fastook J.L., Holmlund P.** A glaciological model of the Yonger Drias event in Scandinavia // J. Glaciol., 1994, vol. 40, p. 125–131.
- Fastook J.L., Prentice M.** A finite-element model of Antarctica: sensitivity tests for meteorological mass-balance relationship // Ibid., p. 167–175.
- Glen J.W.** Experiments on the deformation of ice // J. Glaciol., 1952, vol. 2, p. 111–114.
- Greve R.** Thermomechanisches Verhalten polythermer Eisschilde – Theorie, Analytik, Numerik // Physica D. Thesis. Darmschtadt, Germany, Inst. Mechanik, Techn. Hochschule, 1995, 226 p.

- Greve R.** Waxing and waning of the perennial north polar H<sub>2</sub>O ice cap of Mars over obliquity cycles // *Icarus*, 2000, vol. 144, p. 419–431.
- Greve R., Mügge B., Baral D. et al.** Nested high-resolution modelling of the Greenland Summit Region // *Advances in cold-region thermal engineering and science* / Ed. by K. Hutter, Y. Wang, H. Beer. Berlin, Springer, 1999a, p. 285–306.
- Greve R., Weis M., Hutter K.** Palaeoclimatic evolution and present conditions of the Greenland Ice Sheet in the vicinity of Summit: An approach by large-scale modelling // *Paleoclimates*, 1998, vol. 2, p. 133–161.
- Greve R., Wyrwoll K.-H., Eisenhauer A.** Deglaciation of the Northern Hemisphere at the onset of the Eemian and Holocene // *Ann. Glaciol.*, 1999b, vol. 28, p. 1–8.
- Hindmarsh R.C.A., Payne A.J.** Time-step limits for stable solutions of the ice-sheet equation // *Ann. Glaciol.*, 1996, vol. 23, p. 74–85.
- Hulbe C.L., MacAyeal D.R.** A new numerical model of coupled inland ice sheet, ice stream, and ice shelf flow and its application to the West Antarctic Ice Sheet // *J. Geophys. Res.*, 1999, vol. 104(B11), p. 25349–25366.
- Hutter K.** Theoretical Glaciology: material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets. Dordrecht etc., D. Reidel, 1983, 510 p.
- Huybrechts P.** A 3-D model for the Antarctic ice sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast // *Climate Dyn.*, 1990, vol. 5, p. 79–92.
- Huybrechts P.** The Antarctic ice sheet and environmental change // *Ber. Polarforschung*, 1992, vol. 99, p. 1–241.
- Huybrechts P.** Basal temperature conditions of the Greenland ice sheet during the glacial cycles // *Ann. Glaciol.*, 1996, vol. 23, p. 226–236.
- Huybrechts P.** Sea-level changes at the LGM from ice-dynamic reconstructions of the Greenland and Antarctic ice sheets during the glacial cycles // *Quatern. Sci. Rev.*, 2002, vol. 21, p. 203–231.
- Huybrechts P., Oerlemans J.** Evolution of the East Antarctic ice sheet: a numerical study of thermomechanical response patterns with changing climate // *Ann. Glaciol.*, 1988, vol. 11, p. 52–59.
- Huybrechts P., de Wolde J.** The dynamic response of the Greenland and Antarctic Ice Sheets to Multiple-Century climatic warming // *J. Climate*, 1999, vol. 12, p. 2169–2188.
- Huybrechts P., Rybak O., Pattyn F. et al.** Ice thinning, upstream advection and non-climatic biases for the upper 89 % of the EDML ice core from a nested model of the Antarctic ice sheet // *Climate of the Past*, 2007, vol. 3, p. 577–589.
- Imbrie J.Z., Hays J.D., Martinson D.G. et al.** The orbital theory of Pleistocene climate: support from a revised chronology of the marine  $\delta^{18}\text{O}$  record // *Milankovich and Climate* / Ed. by A. Berger et al. Dordrecht, D. Reidel, 1984, p. 269–305.
- Jenssen D.** A three-dimensional polar ice sheet model // *J. Glaciol.*, 1977, vol. 18(80), p. 373–389.
- Le Meur E., Huybrechts P.** A comparison of different ways of dealing with isostasy: examples from modeling the Antarctic ice sheet during the last glacial cycle // *Ann. Glaciol.*, 1996, vol. 23, p. 309–317.
- Marshall S.J., Clarke G.K.C.** A continuum mixture model of ice stream thermomechanics in the Laurentide Ice Sheet 1. Theory // *J. Geophys. Res.*, 1997, vol. 102(B9), p. 20599–20614.
- Marshall S.J., Cuffey K.M.** Peregrinations of the Greenland Ice Sheet divide in the last glacial cycle: implications for central Greenland ice cores // *Earth and Planet. Sci. Lett.*, 2000, vol. 179, p. 73–90.
- North G.R., Mengel J.R., Short D.A.** Simple energy balance climate model resolving the seasons and continents: Application to the astronomical theory of the ice ages // *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 88, p. 6576–6586.
- Pattyn F.** A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model: Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes // *J. Geophys. Res.*, 2003, vol. 108 (B8), 2382, doi:10.1029/2002JB002329.
- Pattyn F., Huyghe A., De Brabander S., De Smedt B.** Role of transition zones in marine ice sheet dynamics // *J. Geophys. Res.*, 2006, vol. 111, F02004, doi: 10.1029/2005JF000394.
- Payne A.J.** A thermomechanical model of ice flow in West Antarctica // *Climate Dyn.*, 1999, vol. 15, p. 115–125.
- Pollard D., DeConto R.M., Nyblade A.A.** Sensitivity of Cenozoic Antarctic ice sheet variations to geothermal heat flux // *Global and Planet. Change*, 2005, vol. 49, p. 63–74.
- Price S.F., Waddington E.D., Conway H.** A full-stress, thermo-mechanical flow band model using the finite volume method // *J. Geophys. Res.*, 2007, vol. 112, F03020, doi:10.1029/2006JF000724.
- Ritz C.** EISMINT Intercomparison experiment. Comparison of existing Greenland models // Internet publ., 1997. (<http://homepages.vub.ac.be/~phuybrec/eismint/green-descr.pdf>).
- Ritz C., Fabre A., Letréguilly A.** Sensitivity of a Greenland ice sheet model to ice flow and ablation parameters: consequences for the evolution through the last climatic cycle // *Climate Dyn.*, 1997, vol. 13, p. 11–24.
- Ritz C., Rommelaere V., Dumas C.** Modeling the evolution of Antarctic ice sheet over the last 420,000 years: Implications for altitude changes in the Vostok region // *J. Geophys. Res.*, 2001, vol. 106(D23), p. 31943–31964.
- Robin G. de Q.** Ice cores and climatic change // *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond., B.*, 1977, vol. 280, p. 143–168.
- Saito F., Abe-Ouchi A.** Sensitivity of Greenland ice sheet to the numerical procedure employed for ice-sheet dynamics // *Ann. Glaciol.*, 2005, vol. 42, p. 331–336.
- Savvin A., Greve R., Calov R. et al.** Simulation of the Antarctic ice sheet with a three-dimensional polythermal ice-sheet model, in support of the EPICA project. II. Nested high-resolution treatment of Dronning Maud Land, Antarctica // *Ann. Glaciol.*, 2000, vol. 30, p. 69–75.
- Takeda A., Cox S., Payne A.J.** Parallel numerical modelling of the Antarctic Ice Sheet // *Computs and Geosci.*, 2002, vol. 28, p. 723–734.
- Tarasov L., Peltier W.R.** A high-resolution model of the 100 kyr Ice Age cycle // *Ann. Glaciol.*, 1997, vol. 25, p. 58–65.
- Tarasov L., Peltier W.R.** Greenland glacial history, borehole constraints, and Eemian extent // *J. Geophys. Res.*, 2003, vol. 108(B3), 2143, doi:10.1029/2001JB001731.
- Van de Wal R.S.W.** The importance of thermodynamics for modelling the volume of the Greenland ice sheet // *J. Geophys. Res.*, 1999, vol. 104(D4), p. 3887–3898.
- Verbitsky M., Saltsman B.** Modeling the Antarctic ice sheet // *Ann. Glaciol.*, 1997, vol. 25, p. 259–267.
- Vieli A., Payne A.J.** Assessing the ability of numerical ice sheet models to simulate grounding line migration // *J. Geophys. Res.*, 2005, vol. 110, F01003, doi:10.1029/2004JF000202.
- Zweck C., Huybrechts P.** Modeling of the northern hemisphere ice sheets during the last glacial cycle and glaciological sensitivity // *J. Geophys. Res.*, 2005, vol. 110, D07103, doi:10.1029/2004JD005489.

Поступила в редакцию  
20 декабря 2007 г.