

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНТИНЕНТАЛЬНЫХ ЛЕДНИКОВЫХ ЩИТОВ. 1. АРХИТЕКТУРА МОДЕЛЕЙ

О.О. Рыбак

*Сочинский научно-исследовательский центр РАН, 354000, Сочи, ул. Театральная, 8а, Россия, snic@sochi.ru
Институт полярных и морских исследований им. А. Вегенера, Д-27515, Бремерхафен, ФРГ*

Математические модели ледниковых щитов являются эффективным инструментом для изучения криосферы Земли. С их помощью исследуется современное состояние и эволюция ледниковых щитов Гренландии и Антарктиды, прогнозируется их будущее, оценивается их взаимосвязь с климатом планеты. Используя метод моделирования, реконструируют палеооледенение Северного полушария в четвертичном периоде. В работе представлена историческая перспектива развития моделирования ледниковых щитов от простейших версий до комплексных трехмерных термомеханических моделей. Показано, что современные модели имеют схожую архитектуру. Дана характеристика отдельных структурных блоков модели, физических и динамических процессов и их аппроксимаций, принятых в современных моделях. Рассмотрены перспективы развития моделирования в будущем.

Ледниковый щит, ледник, математическая модель, Антарктида, Гренландия, палеоклимат

MATHEMATICAL MODELS OF THE CONTINENTAL ICE SHEETS. 1. MODEL ARCHITECTURE

O.O. Rybak

*Sochi Scientific Research Center RAS, 354000, Sochi, Teatrnaya str., 8a, Russia, snic@sochi.ru
Alfred Wegener Institute of Polar and Marine Researches, D-27515, Bremerhafen, Germany*

Mathematical models of ice sheets are regarded as important tools for studying cryosphere of the Earth. They are employed to examine the present-day state and evolution of the ice sheets of Greenland and Antarctica, to predict their future, and to outline their relationship with the climate of the planet. Modeling is an effective way to reconstruct glaciation of the Northern Hemisphere in the Quaternary. In the paper, our interest is focused on the history of development of ice sheet modeling beginning with the simplest versions to the complex 3-D thermomechanical models. It is demonstrated that all up-to-date models have the same architecture. We give the description of typical model blocks, physical and dynamical processes, and their approximations. Prospects for the development of modeling are discussed.

Ice sheet, glacier, mathematical model, Antarctica, Greenland, paleoclimate

ВВЕДЕНИЕ

Физико-химический состав ледниковых покровов Гренландии и Антарктиды содержит информацию о вариациях температуры воздуха и атмосферной циркуляции в прошлом [Robin, 1977; Котляков, Гордиенко, 1982]. Интерес к истории климата и необходимость построения сценариев его эволюции в будущем обусловили расширяющиеся масштабы исследования континентального оледенения и изучения всего комплекса его взаимосвязей с процессами в атмосфере, океане и литосфере Земли. Важнейшим инструментом реконструкции ледниковых щитов в прошлом и единственным инструментом прогноза их состояния в будущем является математическое моделирование.

Первые теоретические работы о закономерностях протекания динамических и термодинамических процессов в горных ледниках и ледниковых щитах появились более полувека назад. Эти работы постепенно формировали теоретическую основу для математического моделирования сложного

комплекса процессов, определяющих эволюцию ледниковых покровов. Данные, полученные в ходе глубокого бурения льда и дна Мирового океана, позволили хронологически восстановить последовательность изменений климата и связанных с ними вариаций уровня моря. Развитие вычислительной техники подготовило условия для постановки численных экспериментов, длительность которых достигает в настоящее время сотен тысяч модельных лет. За последние полтора десятилетия было разработано несколько основных типов трехмерных термомеханических моделей ледниковых щитов, которые описывали эволюцию покровного оледенения в связи с изменениями климата и уровня Мирового океана.

Подробности описания механики деформаций льда и закономерностей протекания процессов теплообмена в лабораторных условиях и в природных объектах содержатся во многих монографиях [Шумский, 1969; Богородский, Гаврило, 1980; Зоти-

ков, 1982; Hutter, 1983; Lliboutry, 1987; Paterson, 1994; Van der Veen, 1999], поэтому в рамках статьи нет необходимости останавливаться на них. Одна из целей настоящей работы – выделить общие принципы построения математической модели ледникового щита. Что бы ни было объектом моделирования – современные щиты Гренландии или Антарктиды, исчезнувшие Лаврентийский или Фенно-Скандинавский щиты или полярный купол на Марсе, – подход к построению математической модели будет одним и тем же, хотя детали, естественно, будут различаться. Наиболее важным представляется формулирование базовых принципов, которые позволяют перейти от описания процессов механической деформации льда к собственно моделированию эволюции ледникового щита как единого целого в меняющейся окружающей среде. Другая цель работы – показать перспективы развития современных моделей. Во второй части статьи внимание будет сосредоточено на различиях между современными моделями.

1. ЭВОЛЮЦИЯ МОДЕЛЕЙ

1.1. Ранние версии

На начальном этапе развития математического моделирования ледников и ледниковых покровов (начало 50-х – середина 70-х гг.) усилия были направлены на описание термических и динамических процессов вне их связи друг с другом. По сути, первые модели разрабатывались для того, чтобы, с одной стороны, объяснить лабораторные эксперименты, а с другой – данные полевых исследований, которые активизировались в период проведения Международного геофизического 1957/58 года (МГГ). Изначально работы, в которых рассматривалось поле температуры внутри массы льда, не касались переноса тепла полем скоростей. Они имели целью объяснить с точки зрения теории наблюдаемые профили температуры в глубоких скважинах [Robin, 1955; Weertman, 1968; Philibeth, Federer, 1971]. В этих расчетах были задействованы простые одномерные (имеющие только вертикальную координату) стационарные модели. Поскольку горизонтальной скоростью пренебрегали, эти модели могли быть использованы для интерпретации данных лишь в областях вблизи ледоразделов, где эффект адвекции пренебрежимо мал. В целом постановка задачи в простых моделях вступала в противоречие с реальностью, и впоследствии они были развиты в модели движущихся колонок льда. В последних сохранялась прежняя схема расчета вертикального распределения температуры, но в грубом приближении включался эффект адвекции. Таким образом, одномерная модель фактически превращалась в двумерную. Так, В. Бадд с соавт. [Budd et al., 1971] учитывали горизонтальную адвекцию неявным образом – через

изменения приземной температуры, по мере того как колонка льда перемещалась вдоль потока. В такой постановке модель не учитывала уменьшение горизонтальной скорости с глубиной. Тем не менее приближение движущейся колонки можно было считать шагом вперед, поскольку в такой постановке модель адекватно описывала те случаи, когда горизонтальная скорость потока льда была обусловлена в основном базальным скольжением или когда основное падение горизонтальной скорости происходило в нижнем слое льда.

Другой подход к описанию динамики льда отдельно от его термики заключался в том, чтобы считать лед изотермическим. В одном из первых исследований трехмерной динамики [Rasmussen, Campbell, 1973] лед рассматривался как ньютоновская жидкость. Позднее в [Budd, Jenssen, 1975] была разработана двумерная модель, где в баланс сил включались нормальные напряжения. Модель позволяла рассчитывать скорость в любой точке вдоль потока. В вертикально проинтегрированной модели М. Махаффи [Mahaffy, 1976] деформация льда происходила под действием только тангенциальных напряжений. Это была одна из первых моделей, сформулированная в виде компьютерной программы. Она решалась численно в прямоугольной области и позволяла рассчитать топографию поверхности произвольного ледникового щита. По сути, модель представляла собой прообраз современной трехмерной нестационарной модели.

1.2. Термомеханические модели

В реальности динамика массы льда в значительной степени обусловлена полем температуры, и наоборот, распределение температуры зависит от скорости растекания. Лабораторные исследования зависимости вязкости льда от температуры позволили обобщить закономерности связей между напряжениями и деформациями в форме так называемого закона Глена [Glen, 1955], который используется и до настоящего времени. Учитывать зависимости между полем температуры и полем скоростей (термомеханическое сопряжение) в моделях начали лишь с середины 1970-х гг. В частности, в работе С.С. Григоряна с соавт. [Grigoryan et al., 1976] в общем виде были сформулированы теоретические основы математического моделирования ледниковых объектов различного пространственного масштаба. Практическая реализация в виде численного эксперимента с одной из первых термомеханических моделей описана в работе [Jenssen, 1977]. Динамическое описание растекания льда в ней во многом схоже с упомянутой выше моделью Махаффи, однако шаг вперед состоял во введении в трехмерную модель безразмерной вертикальной координаты. Работы [Mahaffy, 1976; Jenssen, 1977] можно считать этапными, так как в них была окончательно сформулирована концеп-

ция архитектуры математической модели ледникового щита и реализована процедура постановки численных экспериментов, основные принципы которых используются до настоящего времени.

В работе [Jenssen, 1977] были поставлены задачи, которые предстояло решить в дальнейшем.

- Учитывать ли в тепловом балансе генерацию тепла за счет внутреннего и базального трения?

- Как повлияет на результаты расчетов включение в модель описания термодинамических процессов на границе раздела ложе–лед?

- Как описывать поток талой воды?

- Как влияет талая вода на уменьшение напряжения на нижней границе?

- Как поступать с фазовыми переходами: рассчитывать в модели, параметризовать или игнорировать?

- Как поступать со скоростями деформаций в горизонтальной плоскости: включать в модель все, включать некоторые или игнорировать все?

- Учитывать условие неразрывности на каждом временном модельном шаге или каждые несколько шагов?

- Как описывать поток геотермического тепла: считать постоянным во всей области интегрирования или учитывать пространственные вариации?

Опыт последующих лет показал, что развитие моделей следует в основном по пути решения поставленных вопросов.

Важными компонентами, которые стали учитываться в моделировании в последующие годы, были реакция литосферы на меняющуюся в ходе климатических изменений массу ледникового щита и описание шельфовых ледников [Oerlemans, 1982]. Хотя эта модель все еще была вертикально проинтегрированной и имела грубое (100 км) пространственное разрешение, тем не менее, в ней присутствовали уже все компоненты, которые в

будущем составили архитектуру трехмерных комплексных моделей.

1.3. Приближение мелкого льда и появление комплексных моделей

С.С. Григоряном и П.А. Шумским [1975] для описания динамики трехмерного нестационарного ледника был предложен метод тонкого пограничного слоя, позволявший упростить описание растекания льда в тех случаях, когда кривизной его поверхности и ложа можно пренебречь. Позднее К. Хуттер [Hutter, 1981] предложил аналогичную концепцию “аппроксимации мелкого льда” – Shallow Ice Approximation (SIA), которую в окончательном виде сформулировал в монографии [Hutter, 1983]. В рамках SIA считается, что деформации льда обуславливаются лишь тангенциальными напряжениями в вертикальной плоскости, а остальные напряжения несущественны в балансе сил. SIA накладывает ограничение на соотношение между горизонтальным и вертикальным масштабами рассматриваемого потока льда приблизительно как 10:1.

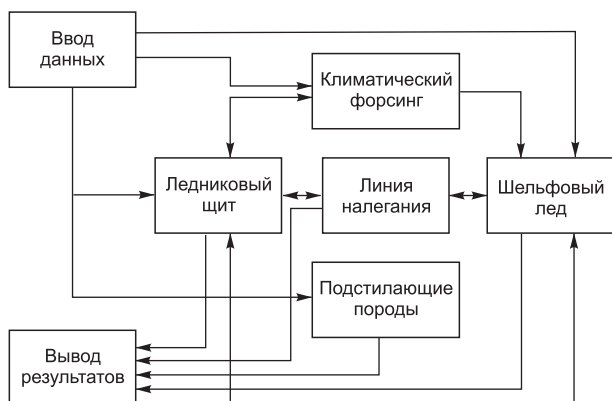
В одной из первых комплексных моделей [Herterich, 1988] изучался Антарктический ледниковый щит во время гляциальной фазы. Эта стационарная модель все еще имела грубое пространственное разрешение 100 км и фиксированное вертикальное разрешение 285 м. В ходе численных экспериментов определялась скорость аккумуляции, которая потребовалась бы для сбалансирования горизонтальной дивергенции вертикально проинтегрированного потока льда.

На грубое пространственное разрешение (100 км) как на главный источник неточностей моделей было указано ранее [Jenssen, 1977]. Ограничением для увеличения пространственного разрешения были, по-видимому, доступные в то время вычислительные ресурсы.

Применение SIA позволило существенно сократить объем вычислений при сохранении точности, в связи с чем оно легло в основу первого поколения эффективных трехмерных комплексных термомеханических моделей, которое появилось в конце 1980–1990-х гг. [Budd, Jenssen, 1989; Huybrechts, 1990, 1992; Verbitsky, Saltsman, 1997; Tarasov, Peltier, 1997; Calov et al., 1998]. Эти модели имели большее пространственное разрешение (20–40 км), и стало возможно применять их для решения задач пространственно-временной эволюции ледниковых щитов в условиях меняющейся окружающей среды.

1.4. Архитектура комплексных моделей

Под комплексными (англ. comprehensive) моделями ледниковых щитов мы имеем в виду такие модели, которые описывают механические и термодинамические процессы в самих щитах и свя-



Основные блоки в модели континентального ледникового щита и организация взаимодействия между ними.

занных с ними средах: в климатической системе, океане, земной коре. Блочная архитектура, характерная практически для всех современных моделей, показана на рисунке. Условно модель можно разбить на семь блоков. Это два служебных блока: для организации ввода начальных данных, различных параметров и управляющих рядов (блок входных данных) и для вывода результатов расчетов (блок вывода). Климатический блок служит для расчета приземной температуры воздуха, составляющих баланса массы ледника и скорости таяния шельфовых ледников. Три блока необходимы для расчетов динамики ледникового щита, шельфовых ледников и подстилающих пород соответственно. Отдельный блок введен для определения положения линии налегания – границы между собственным щитом и шельфовым ледником.

2. ЛЕДНИКОВЫЙ ЩИТ

2.1. Уравнения динамики

Современная модель динамики ледникового щита строится в предположении о том, что лед представляет собой несжимаемую вязкую ньютоновскую жидкость. Будем рассматривать декартову систему координат с горизонтальными осями x , y и вертикальной осью z , направленной вверх. Базовая стандартная система уравнений модели (см., например, [Pattyn, 2003]) будет включать уравнения сохранения массы, момента и энергии:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_i \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

$$\rho_i c_p \frac{dT_i}{dt} = k_i \nabla^2 T_i + \Phi, \quad (2.3)$$

где \mathbf{v} – трехмерный вектор скорости; t – время; $\boldsymbol{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений Коши с компонентами σ_{ij} ; T_i – температура льда; Φ – приток тепла за счет внутреннего трения.

Константы в (2.2), (2.3) и в последующих уравнениях принимают следующие значения: плотность льда $\rho_i = 910 \text{ кг/м}^3$; плотность морской воды $\rho_w = 1028 \text{ кг/м}^3$; плотность вещества астеносферы $\rho_a = 3300 \text{ кг/м}^3$; плотность пород земной коры $\rho_r = 3300 \text{ кг/м}^3$; параметр базального скольжения $A_{sl} = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}^8/(\text{Н}^3 \cdot \text{г})$; коэффициент жесткости $D = 10^{25} \text{ Н} \cdot \text{м}$; коэффициент диффузии $D_a = 0,5 \cdot 10^8 \text{ м}^2/\text{год}$; теплоемкость льда $c_p = 2009 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; теплоемкость литосферы $c_r = 1000 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; гравитационная постоянная $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; коэффициент теплопроводности $k_i = 6,62 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{год})$; коэффициент теплопроводности в литосфере $k_r = 1,04 \cdot 10^8 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{год})$.

Подставляя (2.1) в левую часть (2.2) и пренебрегая ускорениями $\partial \mathbf{v}/\partial t$, получим

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_i \mathbf{g} = 0. \quad (2.4)$$

В некоторых приложениях, в которых лед не считается изотропным (см. п. 6.3), решается система уравнений с полным тензором Коши. Однако для больших пространственных масштабов это нецелесообразно, и (2.4) можно упростить, считая, что так называемым вариационным напряжением можно пренебречь ($\partial \sigma_{zx}/\partial x = 0$, $\partial \sigma_{zy}/\partial y = 0$). В результате, записав упрощенное уравнение (2.4) в скалярной форме, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho_i g. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Гидростатическое давление представляет собой сумму нормальных напряжений $P = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$. Тензор Коши можно разложить на две составляющие – нормальную и тангенциальную, и компоненты его в этом случае запишутся как $\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k \sigma_{kk} + \tau_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Пренебрегая атмосферным давлением в третьем уравнении из (2.5) и интегрируя его от поверхности щита $s(x, y)$ вниз до $z = 0$, получим $\sigma_{zz} = \int_0^s \rho_i g dz = \rho_i g s(x, y)$. Считая, что нормаль-

ное напряжение на поверхности равно нулю, делая замену $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k \sigma_{kk}$ в первых двух

уравнениях (2.5), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (2\tau_{xx} + \tau_{yy}) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho_i g \frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} (2\tau_{yy} + \tau_{xx}) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho_i g \frac{\partial s}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) описывают баланс сил так называемой “аппроксимации неполного второго порядка” [Blatter, 1995] (подробнее о ее приложениях см. п. 6.2). Пренебрегая первым и вторыми слагаемыми в (2.6), получим уравнения “аппроксимации мелкого льда” (SIA, упоминавшуюся в п. 1.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho_i g \frac{\partial s}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho_i g \frac{\partial s}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Напряжения и скорости деформации связаны законом Глена [Glen, 1955]: $\tau_{ij} = 2\eta \epsilon_{ij}$, где

$\eta = \frac{1}{2} A(T_i^*)^{-1/n} \dot{\epsilon}_e^{(1-n)/n}$ – эффективная вязкость;
 $\dot{\epsilon}_e = \left(\sum_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} / 2 \right)^{1/2}$ – второй инвариант тензора скоростей деформации (так называемая эффективная скорость деформации); $A(T_i^*)$ – функция температуры, исправленной на зависимость температуры плавления льда от давления (эта же температура определяет степень пластичности льда) [Paterson, 1994]; $n = 3$ в большинстве приложений [Paterson, 1994]. По определению скорости деформации могут быть записаны как градиенты скорости растекания льда:

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Считая, что по абсолютной величине горизонтальные градиенты вертикальной скорости много меньше вертикальных градиентов горизонтальной скорости, т. е. $\partial w / \partial x \ll \partial u / \partial z$ и $\partial w / \partial y \ll \partial v / \partial z$, а $\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = 0$ в рамках SIA, и учитывая уравнение неразрывности (2.1), получим выражение для эффективной скорости деформации $\dot{\epsilon} = \left(\dot{\epsilon}_{xz}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 \right)^{1/2}$. Подставляя его в закон Глена, а последний, в свою очередь, в (2.7) и интегрируя результат от подстилающей поверхности $b(x, y)$ до z , получим алгебраические уравнения для компонент горизонтальной скорости растекания льда

$$\begin{aligned} u(z) &= -2(\rho_i g)^3 \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 \right] \times \\ &\times \frac{\partial s}{\partial x} \int_b^z A(T_i^*) (H-z)^3 dz + u_b, \\ v(z) &= -2(\rho_i g)^3 \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 \right] \times \\ &\times \frac{\partial s}{\partial y} \int_b^z A(T_i^*) (H-z)^3 dz + v_b, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $H = s - b$ – толщина льда; s – топография поверхности; b – топография ложа; u_b, v_b – компоненты вектора скорости базального скольжения \mathbf{u}_b . Для их расчета чаще всего используют подход, основы которого заложены в работах [Weertman, 1964, 1972]. Считается, что скорость базального скольже-

ния пропорциональна n -й степени тангенциального напряжения на нижней границе щита: $u_b = -A_{sl} \tau_{xz}^n |_b / Z$, $v_b = -A_{sl} \tau_{yz}^n |_b / Z$. Параметр Z отвечает за уменьшение базального трения вследствие давления подледной воды: $Z = H$, если $h > H_{sl}$, и $Z = H + \rho_w (h - H_{sl}) / \rho_i$, если $h < H_{sl}$ (H_{sl} – уровень моря).

Уравнение для вертикальной скорости следует из уравнения неразрывности (2.1): $\partial w / \partial z = -\partial u / \partial x - \partial v / \partial y$. Интегрируя его от основания щита до верхней границы, получаем

$$w_b - w_s = - \int_s^b (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) dz. \quad (2.10)$$

Кинематическое граничное условие на верхней поверхности

$$w_s = \frac{\partial s}{\partial t} + u_s \frac{\partial s}{\partial x} + v_s \frac{\partial s}{\partial y} - M_s,$$

где M_s – разность между скоростью аккумуляции и скоростью абляции.

Кинематическое условие на нижней границе

$$w_b = \frac{\partial b}{\partial t} + u_b \frac{\partial b}{\partial x} + v_b \frac{\partial b}{\partial y} - M_b,$$

где M_b – скорость базального таяния.

Подстановка граничных условий в левую часть (2.10) дает уравнение, описывающее изменение локальной толщины льда, которое, собственно, и решается в модели:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla(\mathbf{v}_h H) + M_s - M_b, \quad (2.11)$$

где \mathbf{v}_h – вектор горизонтальной скорости. Вид уравнения (2.11) не зависит от вида уравнений для горизонтальной скорости. Граничные условия на горизонтальных границах зависят от конкретной задачи – это может быть и постоянная величина, полученная из наблюдений, и переменная, параметризуемая исходя из скорости откалывания айсбергов, и т. д.

Переменные T_i, b, M_s, M_b связывают эволюцию щита с процессами в климатической системе, океане и литосфере.

2.2. Прогиб земной коры под весом ледникового щита

Вес ледникового щита создает давление на подстилающие породы. Последние будут стремиться восстановить равновесие и прогнуться под весом щита. Взаимодействие между ледниковым щитом и подстилающими породами является причиной двух важных эффектов [Le Meur, Huybrechts, 1996]. Во-первых, понижение абсолютной высоты поверхности щита вследствие прогиба ложа будет усиливать абляцию (в случае Гренландии), уменьшая баланс массы, следствием чего бу-

дет дальнейшее понижение абсолютной высоты поверхности. Из-за большой разницы между характерным временем реакции подстилающих пород на снижающуюся нагрузку и реакцией щита на уменьшение баланса массы на поверхности имеет место положительная обратная связь между процессом изостатического приспособления и уменьшением массы щита. По мнению Дж. Урлеманса [Oerlemans, 1981], этот механизм играл важную роль в терминациях гляциальных периодов плейстоцена. Во-вторых, изостатическое приспособление определяет конфигурацию линии налегания, так что запаздывания изостатических колебаний по отношению ко времени изменения нагрузки могут вызывать дополнительные миграции последней.

Полная математическая модель, описывающая строение Земли (например, разработанная в [Peltier, 1974, 1982] или ее модификация Self-gravitating visco-elastic spherical Earth model (SGVE) [Le Meur, 1996]), достаточно сложна для включения в модель ледникового щита, поэтому на практике обычно реализуется один из упрощенных алгоритмов описания изостазии [Le Meur, Huybrechts, 1996]. В их основе лежит представление о литосфере как о прогибающейся под действием меняющейся нагрузки пластине, “плавающей” в вязкой астеносфере. Если пренебречь жесткостью пластины-литосферы, то глубина депрессии может быть выражена как $h = H(\rho_i/\rho_a)$, что в результате дает модель локальной литосферы LL. При ненулевой жесткости нагрузка будет сосредоточена не только в точке приложения нагрузки, но и вокруг нее (модель эластичной литосферы EL). Направленную вниз деформацию ω , вызванную точечной нагрузкой q , можно записать как $D\nabla^4\omega = q - \rho_a g \omega$ [Turcotte, Schubert, 1982], где $\rho_a g \omega$ описывает направленную вверх силу плавучести, которая действует на погруженную в астеносферу часть литосферы. После некоторых преобразований величина депрессии на нормализованном расстоянии от точки действия нагрузки принимает вид

$$\omega(x) = \frac{qL_r^2}{2\pi D}\chi(x), \quad (2.12)$$

где $x = r/L_r$ – нормализованное расстояние; $L_r = [D/(\rho_m g)]^{1/4}$ – радиус относительной жесткости, который определяется эластическими свойствами литосферы; $\chi(x)$ – функция Кельвина нулевого порядка. Разделив правую и левую части (2.12) на нагрузку q , получим в правой части величины, которые можно затабулировать как функции расстояния x и считать в модель во входном блоке.

Реакция астеносферы на внешнюю нагрузку может быть описана с помощью экспоненциально убывающей гидростатической функции отклика

(модель релаксирующей астеносферы RA). Этот подход заключается в допущении, что реакция среды на внешнюю нагрузку пропорциональна разности между равновесным профилем ω и текущим профилем h и обратно пропорциональна характерному времени запаздывания τ : $\partial h/\partial t = -(\omega - h)/\tau$. Другой способ (модель DA) заключается в решении уравнения диффузии в астеносфере. Движущая сила определяется боковым градиентом давления, причем считается, что градиент пропорционален $\omega - h$. Применяя закон сохранения массы, можно соотнести скорость погружения пород и вытеснение субстрата астеносферы в форме уравнения диффузии [Turcotte, Schubert, 1982]:

$$\frac{dh}{dt} = D_a \frac{d^2(\omega - x)}{dx^2}, \quad D_a = \frac{g\rho_a H^3}{3\nu}. \quad (2.13)$$

На практике D_a определяют по измеренной современной скорости подъема земной коры в Северной Америке и Фенноскандии после последнего оледенения [Le Meur, Huybrechts, 1996]. Заметим, что величина прогиба ω не что иное, как высота подстилающей поверхности $b(x, y)$, которая входит, в частности, в кинематическое граничное условие на нижней границе щита.

В современных моделях ледниковых щитов используют одну из возможных комбинаций описания литосферы и астеносферы. В частности, модель EL + DA используется в [Huybrechts, 1992], модель EL + RA в [Ritz et al., 2001], модель LL + RA в [Verbitsky, Saltsman, 1997], однако в некоторых работах применяют полную модель Земли [Tarasov, Peltier, 2003].

2.3. Тепловой поток на нижней границе ледникового щита

На нижней границе щита тепло поступает за счет трения при базальном скольжении, если последнее имеет место, и за счет теплообмена с подстилающими породами. Таким образом, граничное условие на нижней границе имеет вид

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_b = \gamma + \frac{\tau_b \cdot \mathbf{v}_b}{k_i}, \quad (2.14)$$

где γ – поток тепла из подстилающих пород, $\gamma = \frac{k_r}{k_i} \left. \frac{\partial T_r}{\partial z} \right|_b$. Толщина слоя подстилающих пород меняется от модели к модели. В этом слое описывают, как правило, только вертикальный поток тепла [Huybrechts, de Wolde, 1999]:

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} = \frac{k_r}{\rho_r c_r} \frac{\partial^2 T_r}{\partial z^2}. \quad (2.15)$$

Краевое условие на верхней границе (границе раздела подстилающие породы–лед) $\left. \frac{\partial T_r}{\partial z} \right|_b = \frac{k_i}{k_r} \gamma$,

на нижней границе $\left. \frac{\partial T_r}{\partial z} \right|_{low} = \frac{G}{k_r}$, где G – поток геотермического тепла (ПГТ).

Поток геотермического тепла – важнейший параметр, определяющий текущее состояние и эволюцию ледового щита. Роль ПГТ в эволюции ледниковых щитов трудно переоценить. Вязкость льда зависит от его температуры, и, следовательно, вариации ПГТ влияют на скорость его растекания. Величина ПГТ контролирует в значительной степени баланс массы щита, так как основной расход массы происходит через быстрые окраинные выводные потоки [Shumskiy, Krass, 1976; Bamber et al., 2000]. В работах [Näslund et al., 2005; Fox Maule et al., 2005] показано, что вариации ПГТ могут быть достаточно велики уже в масштабах ~100 км. Однако в связи с тем, что прямые измерения ПГТ под существующими ледниковыми щитами отсутствуют, этот параметр оценивают исходя из тектонической структуры Гренландии и Антарктиды [Sclater et al., 1980], из данных сейсмического зондирования [Shapiro, Ritzwoller, 2004], спутниковых измерений вариаций магнитного поля [Fox Maule et al., 2005] и др. ПГТ в модели может быть либо постоянной величиной [Huybrechts, 1992; Ritz et al., 2001], либо представлять собой поле [Tarasov, Peltier, 2003].

3. ШЕЛЬФОВЫЕ ЛЕДНИКИ И ЛИНИЯ НАЛЕГАНИЯ

3.1. Динамика шельфового ледника

В отличие от ледникового щита шельфовый ледник находится в гидростатическом равновесии с окружающим океаном. Если уровень моря падает ниже равновесной отметки, то шельфовый ледник переходит в категорию континентального, и наоборот, происходит миграция линии налегания. Таким образом, через изменение уровня Мирового океана (например, в соответствии с рядами изотопов O_2 из [Bassinot et al., 1994; Imbrie et al., 1984]) реализуется один из двух механизмов привязки динамики ледникового щита к динамике палеоклимата (либо к проекциям изменений климата в будущем).

На шельфовом леднике поле скорости не определяется только локально. В противоположность континентальному льду шельфовый ледник испытывает пренебрежимо малое трение, так что горизонтальными тангенциальными напряжениями можно пренебречь: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ [Shumskiy, Krass, 1976]. Кроме того, скорости деформации (и компоненты скорости) можно считать независимыми от глубины, поскольку углы наклона поверхности на шельфе крайне малы [Huybrechts, 1992]. Таким образом, движущей силой на шельфе будут горизонтальные градиенты нормальных и

тангенциальных напряжений в горизонтальной плоскости. Исходя из этого, в статье [MacAyeal et al., 1996] была предложена система уравнений для описания поля горизонтальной скорости шельфового ледника:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2\eta H \left(2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \rho_i g H (m A(T_i))^{1/n} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[2\eta H \left(2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \rho_i g H (m A(T_i))^{1/n} \frac{\partial s}{\partial y},$$

где $\eta = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{(1-n)/2n}$ – эффективная вязкость; m – коэффициент пропорциональности.

3.2. Граница шельфового ледника и континентального льда

Поскольку механика деформаций в шельфовом леднике и в массе континентального льда определяется различными напряжениями, предложено ввести между щитом и шельфовым льдом переходную зону, которая расположена в окрестностях линии налегания. В ранней работе Ф. Хёбрехтса [Huybrechts, 1990] на основе выводов К. Хертериха [Herterich, 1987] утверждается, что ширину переходной зоны достаточно определить как один пространственный шаг модели. Поток на линии налегания рассматривается как переходный от континентального к шельфовому. В переходной зоне в баланс сил (2.6) вносят вклад все компоненты тензора напряжений. Такой подход позволяет линии налегания свободно мигрировать в соответствии с геологическими реконструкциями во временном масштабе ледниковых циклов.

3.3. Нижняя граница шельфового ледника

В работе [Huybrechts, de Wolde, 1999] показано, что скорость таяния льда на нижней границе шельфового ледника оказывает влияние на положение его линии налегания, которое аналогично влиянию вариаций эффективной вязкости в (3.1). Донное таяние на шельфе – комплексный процесс, который зависит от величины летнего прогрева вод океана, длительности периода, когда отсутствует морской лед, термохалинных свойств водных масс и особенностей циркуляции вод под шельфовым ледником. Поэтому скорость таяния обычно тем или иным способом параметризуют [Ritz et al., 2001; Huybrechts, 2002].

4. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА: КЛИМАТИЧЕСКИЙ ФОРСИНГ

Через верхнюю границу системы ледниковый щит–шельфовый ледник осуществляется связь последней с атмосферой. Температура поверхности льда принимается равной приземной температуре воздуха. К настоящему времени разработано два общих подхода к имитации долгопериодных вариаций климата, определяющих эволюцию ледниковых щитов (климатический форсинг). Первый подход заключается в расчете ряда приземной температуры воздуха либо специальными суб-моделями, например энергобалансовой моделью [Tarasov, Peltier, 1997, 1999], либо комбинированием расчетов по модели общей циркуляции атмосферы (GCM) и энергобалансовой модели [Budd et al., 1998], либо использованием так называемых временных срезов из результатов моделирования по GCM [Huybrechts et al., 2004]. Второй подход состоит в том, что ряд изменений приземной температуры воздуха разбивается на две составляющие: меняющуюся со временем часть (климатический сигнал) и стационарную часть, соответствующую современному климату. Климатический сигнал рассчитывается по косвенным данным – рядам относительной концентрации кислорода-18 или дейтерия из ледяных кернов [Ritz et al., 2001; Huybrechts, 2002; Huybrechts et al., 2007; Рыбак и др., 2007]. Стационарная часть вычисляется с учетом изменений температуры с широтой и высотой места [Fortuin, Oerlemans, 1990].

Для расчета скорости аккумуляции (годового количества осадков) используются различные схемы. Например, в основе распространенной схемы параметризации скорости аккумуляции в Антарктиде лежит зависимость этой величины от давления насыщенного водяного пара при температуре конденсации на верхней границе слоя инверсии [Robin, 1977; Bromwich, 1988; Steig, 1997]. Последняя, в свою очередь, практически линейно связана с приземной температурой воздуха [Lorius et al., 1985]: $T_I = 0,67T_S + 88,9$, где T_I – среднегодовая температура на верхней границе инверсионного слоя, К; T_S – среднегодовая температура воздуха у поверхности щита, К.

Так как таяние на поверхности Антарктического щита практически отсутствует, то скорость аккумуляции – это единственный климатический фактор, регулирующий баланс массы щита на поверхности. Для Гренландии и палеощитов Северного полушария при расчетах баланса массы необходимо учитывать скорость абляции. Для параметризации этой характеристики используются схемы, основанные на подсчете градусо-дней с положительной температурой [Tarasov, Peltier, 1997, 1999, 2003; Zweck, Huybrechts, 2005].

5. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Набор входных данных меняется от модели к модели в зависимости от того, как формализованы зависящие от времени процессы климатического форсинга, каковы начальные условия и т. д. Как правило, набор входных данных состоит из начальных полей топографии поверхности щита и подстилающей поверхности, поля современной скорости аккумуляции, матрицы относительной деформации литосферы (см. п. 2.2).

Как правило, в моделях применяют различные шаги по времени для решения модельных уравнений [Huybrechts, de Wolde, 1999; Ritz et al., 2001]. Так, уравнение (2.11) решается с минимальным шагом по времени (~1 год), а (2.13) – с максимальным шагом (~20–100 лет). Практически во всех современных моделях для решения системы уравнений используется метод конечных разностей (за исключением [Fastook, Prentice, 1994], некоторых локальных приложений [Gillet-Chaulet et al., 2005] и некоторых других моделей, где используется метод конечных элементов). Применение метода конечных элементов, которое требует большего расхода машинного времени по сравнению с методом конечных разностей, в перспективе целесообразно для решения задач с увеличением пространственного разрешения в области линии налегания и выводных потоков, а также на фронте ледового шельфа, если предполагается явно описывать процесс откалывания айсбергов.

Поскольку в модели невозможно обратить время, а начальные данные для какой-либо отдаленной эпохи, разумеется, неизвестны, то для того чтобы воспроизвести эволюцию ледникового щита в течение определенного промежутка времени, исходят из его современного состояния. Затем находят стационарное решение для заданных внешних условий (температуры воздуха и уровня моря в начальный момент модельной эволюции), и уже это состояние считают начальным.

6. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ МОДЕЛЕЙ

Специфика исследований последнего времени позволяет определить главные направления, в которых будут развиваться комплексные модели в ближайшие годы. Первое стратегическое направление – включение комплексных моделей ледниковых покровов в качестве одного из блоков в еще более общие модели, так называемые системные модели Земли (Earth System Models), в которые также входят модели циркуляции атмосферы, океана и динамики биосферы. Второе направление – увеличение пространственной детализации. Тре-

тве направление, непосредственно связанное со вторым, – модификация описания процессов и включение новых процессов в модели.

6.1. Системные модели

Системные модели, как правило, состоят из самостоятельных блоков, описывающих одну из сред (климат, океан, ледниковый щит). Они представляют собой модели этих сред, использованные ранее в исследованиях независимо друг от друга [Schmittner et al., 2002; Fichefet et al., 2003; Charbit et al., 2005]. В качестве климатических субмоделей применяются так называемые модели промежуточной сложности (intermediate complexity), поскольку использование обычных моделей общей циркуляции атмосферы и океана невозможно ввиду того, что продолжительность численных экспериментов составляет десятки и сотни тысяч модельных лет [Calov et al., 2002]. Основная трудность, с которой приходится сталкиваться в системном моделировании, состоит в том, что пространственное разрешение климатических и криосферных субмоделей существенно различаются, и для стыковки блоков необходимо прибегать к различного рода процедурам совмещения масштабов.

6.2. Повышение пространственного разрешения. Региональные модели

Модели, в основе которых лежит SIA, воспроизводят динамику ледниковых щитов в целом. Результаты численных экспериментов позволяют сделать вывод о том, что макроописание эволюции щитов в рамках SIA вполне адекватно реальности. Вместе с тем, как показано выше, за рамки возможностей SIA выходит описание динамики отдельных областей щитов, таких как купола и ледоразделы, области вблизи линии налегания. Ограничения в пространственном разрешении не позволяют учесть влияние сложной топографии подстилающей поверхности на поле скоростей растекания льда. Собственно, уже для описания динамики шельфового ледника и переходной зоны между шельфовым ледником и ледниковым щитом приходится выходить за рамки SIA. Описание в модели полного тензора напряжений потребует вычислительных ресурсов на порядки больших, чем требуется для задач, решаемых в рамках SIA. Альтернативой является рассмотренная в п. 2.1 аппроксимация неполного второго порядка. Применение аппроксимации второго порядка ко всему ледниковому щиту также неэффективно с точки зрения объема, времени и стоимости расчетов (расход машинного времени возрастает в сотни раз [Huybrechts et al., 2007]). Для того чтобы рассмотреть поле скоростей потока льда в ограниченной области, где требуется более высокое разрешение, которое можно реализовать в рамках подхода SIA,

или в тех областях, где SIA и высшие порядки аппроксимации дают существенно различающиеся результаты, прибегают к технологии “встраивания” (nesting) моделей высших порядков аппроксимации в комплексные трехмерные модели. Процедура сводится к разделению области интегрирования на два домена: в одном интегрируется комплексная модель, в другом (обычно гораздо меньшего размера) интегрируется встроенная региональная модель [Greve et al., 1999; Рыбак и др., 2007]. Достоинство процедуры регионализации заключается также в том, что она позволяет ассимилировать в численном эксперименте данные наблюдений в ограниченной области щита, пространственная детализация которых гораздо выше, чем в домене комплексной модели [Huybrechts et al., 2007; Рыбак и др., 2007].

6.3. Модификации физических и динамических процессов в моделях

Процедура встраивания региональной модели в комплексную модель дает возможность расширить спектр описываемых динамических процессов. В первую очередь это замечание относится к закономерностям растекания льда. Закон Глена, в котором использован показатель $n = 3$, соблюдается для очень широкого класса процессов. Однако в природе деформации льда могут зависеть от целого ряда факторов, в результате чего лед может вести себя как ньютоновская жидкость ($n = 1$), а может проявлять большую степень нелинейной зависимости от температуры ($n = 4$) [MacAyeal et al., 1996]. В условиях, когда тангенциальные напряжения малы, например в областях ледоразделов, растекание льда обуславливается различными видами деформаций [Pettit, Waddington, 2003].

Закон Глена не учитывает изменений кристаллической структуры льда с глубиной. Между тем структура льда с глубиной меняется, происходит рост кристаллов льда, рекристаллизация, изначально изотропная кристаллическая структура льда с увеличением глубины становится анизотропной [Faria et al., 2003; Thorsteinsson et al., 2003]. Это означает, что в одном направлении лед становится “мягче” и его деформации в этом направлении происходят легче, чем в других. Кажущаяся исчезающе малой разница между скоростями потоков, в котором учтен эффект анизотропии и в котором он не учтен, при интегрировании модели в течение сотен тысяч модельных лет может иметь большое значение для оценки, например, возраста льда или географической точки его происхождения. Хотя в последние годы большие усилия были направлены на формулирование базового соотношения (constitutive relation), которое бы учитывало эволюцию кристаллической структуры льда

(см. обзор [Marshall, 2005]), включение процессов анизотропии в математическую модель динамики льда осуществлено только для стационарных условий и ограниченных географических областей [Gagliardini, Meyssonnier, 2000; Gillet-Chaulet et al., 2005].

Реакция модели на изменения климата, скорость потоков у границ щита и другие эффекты в значительной степени определяются способом описания динамических процессов на нижней границе – подледных или базальных процессов. Эти процессы формализуются в рамках модели, как правило, с большими допущениями [Marshall et al., 2000]. Количественная сторона взаимодействия потока льда и подстилающих пород до сих пор малоизвестна. Одно из направлений модернизации комплексных моделей связано именно с прогрессом в описании подледных гидрологических процессов [Marshall, 2005].

Другое направление модификации комплексных моделей связано с балансом сил в окрестностях линии налегания [Huybrechts, 2006]. С динамической точки зрения процессы на границе ледниковый щит–шельфовый ледник настолько сложны, что для полного их описания необходимо включать в баланс сил (уравнение (2.2)) полный тензор Коши. Заметим, что такое включение целесообразно не по всему периметру щита, где достаточно аппроксимации неполного второго порядка, а только в областях формирования сильных потоков льда [Pattyn et al., 2006], через которые в основном и происходит расход массы ледового щита [Bamber et al., 2000].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течение последних 30 лет математические модели превратились в эффективный инструмент изучения динамики криосферы. Использование трехмерных моделей ледниковых щитов позволяет понять роль покровного оледенения в климатической системе планеты, оценить его вклад в изменение природных условий в прошлом. Моделирование является единственным инструментом для оценки влияния климатических изменений в будущем на криосферу, так же как и последствий ответной реакции криосферы и ее воздействия на природные условия будущего. Современные крупномасштабные модели хорошо воспроизводят динамику внутренних частей ледовых щитов, однако дальнейшее их развитие связано с совершенствованием описания физических и динамических процессов, особенно процессов на границах. К последним можно отнести описание откалывания айсбергов, процессов на нижней границе ледниковых щитов, а также в зоне раздела между континентальным льдом и шельфовым ледником.

Литература

- Богородский В.В., Гаврило В.П.** Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л., Гидрометеоздат, 1980, 384 с.
- Григорян С.С., Шумский П.А.** Простейшая математическая модель трехмерного нестационарного ледника // Науч. труды / Ин-т механики МГУ, 1975, № 42, с. 43–53.
- Зотиков И.А.** Теплофизика ледниковых покровов. Л., Гидрометеоздат, 1982, 286 с.
- Котляков В.М., Гордиенко Г.Г.** Изотопная и геохимическая гляциология. Л., Гидрометеоздат, 1982, 288 с.
- Рыбак О., Хёбрехтс Ф., Паттэн Ф., Штайнхаге Д.** Региональная модель динамики льда. Ч. 1. Описание модели, постановка численного эксперимента и современная динамика потока в окрестностях станции Конен // Материалы гляциол. исслед., 2007, вып. 102, с. 3–11.
- Шумский П.А.** Динамическая гляциология // Итоги науки. Сер. География. М., ВИНТИ, 1969, 172 с.
- Bamber J.L., Vaughan D.B., Joughin J.** Widespread complex flow in the interior of the Antarctic ice sheet // Science, 2000, vol. 287, p. 1248–1250.
- Bassinot F.C., Labeyrie L.D., Vincent E. et al.** The astronomical theory of climate and the age of the Bruhnes–Matuyama magnetic reversal // Earth Planet. Sci. Lett., 1994, vol. 126, p. 91–108.
- Blatter H.** Velocity and stress fields in grounded glaciers: a simple algorithm for including deviatoric stress gradients // J. Glaciol., 1995, vol. 41(138), p. 333–344.
- Bromwich D.H.** Snowfall in High Southern Latitudes // Rev. Geophys., 1988, vol. 26, p. 149–168.
- Budd W.F., Janssen D., Radok U.** Derived physical characteristics of the Antarctic ice sheet // ANARE Intern. Rep., Ser. A (IV), Glaciol. Publ., 1971, vol. 120, 178 p.
- Budd W.F., Janssen D.** Numerical modeling of glacier systems // IAHS Publ., 1975, vol. 104, p. 257–291.
- Budd W.F., Janssen D.** The dynamics of the Antarctic ice sheet // Ann. Glaciol., 1989, vol. 12, p. 16–22.
- Budd W.F., Coutts B., Warner R.C.** Modelling the Antarctic and Northern Hemisphere ice-sheet changes with global climate through the glacial cycle // Ann. Glaciol., 1998, vol. 27, p. 153–160.
- Calov R., Savvin A., Greve R. et al.** Simulation of the Antarctic ice sheet with a three-dimensional polythermal ice-sheet model, in support of the EPICA project // Ibid., p. 201–206.
- Calov R., Ganapolski A., Petoukhov V., Claussen M.** Large-scale instabilities of the Laurentide ice sheet simulated in a fully coupled climate-system model // Geophys. Res. Lett., 2002, vol. 29, doi: 10.1029/2002GL016078.
- Charbit S., Kageyama M., Roche D. et al.** Investigating the mechanisms leading to the deglaciation of past continental northern hemisphere ice sheets with the CLIMBER-GREMLINS coupled model // Global and Planet. Change, 2005, vol. 48, p. 253–273.
- Faria S.H., Kremer J.M., Hutter K.** On the inclusion of recrystallization processes in the modeling of induced anisotropy in ice sheets: a thermodynamist's point of view // Ann. Glaciol., 2003, vol. 37, p. 29–34.
- Fastook J.L., Prentice M.** A finite-element model of Antarctica: sensitivity tests for meteorological mass-balance relationship // J. Glaciol., 1994, vol. 40, p. 167–175.

- Fichefet T., Poncin C., Goosse H. et al.** Implications of changes in freshwater flux from the Greenland ice sheet for the climate of the 21st century // *Geophys. Res. Lett.*, 2003, vol. 30(17), 1911, doi: 10.1029/2003GL017826.
- Fortuin J.P.F., Oerlemans J.** Parameterisation of the annual surface temperature and mass balance of Antarctica // *Ann. Glaciol.*, 1990, vol. 14, p. 78–84.
- Fox Maule C., Purucker M.E., Olsen N., Mosegaard K.** Heat flux anomalies in Antarctica revealed by Satellite magnetic data // *Science*, 2005, vol. 309, p. 464–467.
- Gagliardini O., Meyssonier J.** Simulation of anisotropic ice flow and fabric evolution along the GRIP-GISP2-flow line, central Greenland // *Ann. Glaciol.*, 2000, vol. 30, p. 217–223.
- Gillet-Chaulet F., Gagliardini O., Meyssonier J. et al.** A user-friendly anisotropic flow law for ice-sheet modeling // *J. Glaciol.*, 2005, vol. 51(172), p. 3–14.
- Glen J.W.** The creep of polycrystalline ice // *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1955, vol. 228, p. 519–538.
- Greve R., Mügge B., Baral D. et al.** Nested high-resolution modelling of the Greenland Summit Region // *Advances in Cold-Region Thermal Engineering and Science* / Ed. by K. Hutter, Y. Wang, H. Beer. Berlin, Springer, 1999, p. 285–306.
- Grigoryan S.S., Krass M.S., Shumskiy P.A.** Mathematical model of a three-dimensional non-isothermal glacier // *J. Glaciol.*, 1976, vol. 17, p. 401–417.
- Herterich K.** On the flow within the transition zone between ice sheet and ice shelf // *Dynamics of the West Antarctic ice sheet* / Ed. by C.J. Van der Veen, J. Oerlemans. Dordrecht, D. Reidel, 1987, p. 185–202.
- Herterich K.** A three-dimensional model of the Antarctic ice sheet // *Ann. Glaciol.*, 1988, vol. 11, p. 32–35.
- Hutter K.** The effect of longitudinal strain on the shear stress of an ice sheet. In defence of using stretched coordinates // *J. Glaciol.*, 1981, vol. 29, p. 39–56.
- Hutter K.** *Theoretical Glaciology: material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets.* Dordrecht etc., D. Reidel, 1983, 510 p.
- Huybrechts P.** A 3-D model for the Antarctic ice sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast // *Climate Dyn.*, 1990, vol. 5, p. 79–92.
- Huybrechts P.** The Antarctic ice sheet and environmental change // *Berichte zur Polarforschung*, 1992, Bd 99, S. 1–241.
- Huybrechts P.** Sea-level changes at the LGM from ice-dynamic reconstructions of the Greenland and Antarctic ice sheets during the glacial cycles // *Quatern. Sci. Rev.*, 2002, vol. 21, p. 203–231.
- Huybrechts P.** Numerical modeling of polar ice sheets through time // *Glacier Science and environmental change* / Ed. by P.G. Knight. Oxford, Blackwell Publ., 2006, p. 406–412.
- Huybrechts P., de Wolde J.** The dynamic response of the Greenland and Antarctic ice sheets to Multiple-Century Climatic Warming // *J. Climate*, 1999, vol. 12, p. 2169–2188.
- Huybrechts P., Gregory J., Jassens I., Wild M.** Modelling Antarctic and Greenland volume changes during the 20th and 21st centuries forced by GCM time slice integrations // *Global and Planet. Change*, 2004, vol. 42, p. 83–105.
- Huybrechts P., Rybak O., Pattyn F. et al.** Ice thinning, upstream advection and non-climatic biases for the upper 89 % of the EDML ice core from a nested model of the Antarctic ice sheet // *Climate of the Past*, 2007, vol. 3, p. 577–589.
- Imbrie J.Z., Hays J.D., Martinson D.G. et al.** The orbital theory of Pleistocene climate: support from a revised chronology of the marine $\delta^{18}\text{O}$ record // *Milankovich and Climate* / Ed. by A. Berger et al. Dordrecht, D. Reidel, 1984, p. 269–305.
- Jenssen D.** A three-dimensional polar ice sheet model // *J. Glaciol.*, 1977, vol. 18(80), p. 373–389.
- Le Meur E.** Isostatic postglacial rebound over Fennoscandia with a self-gravitating spherical visco-elastic Earth model // *Ann. Glaciol.*, 1996, vol. 23, p. 318–327.
- Le Meur E., Huybrechts P.** A comparison of different ways of dealing with isostasy: examples from modeling the Antarctic ice sheet during the last glacial cycle // *Ibid.*, p. 309–317.
- Lliboutry L.** *Very slow flow of solids. Basics of modeling in Geodynamics and Glaciology.* Dordrecht, Martinus Nijhoff Publ., 1987, 510 p.
- Lorius C., Jouzel J., Ritz C. et al.** A 150,000-year climatic record from Antarctic ice // *Nature*, 1985, vol. 316, p. 591–596.
- MacAyeal D.R., Rommelaere V., Huybrechts P. et al.** An ice-shelf model test based on the Ross ice shelf // *Ann. Glaciol.*, 1996, vol. 23, p. 46–51.
- Mahaffy M.W.** A three-dimensional numerical model of ice sheets: tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories // *J. Geophys. Res.*, 1976, vol. 81(6), p. 1059–1066.
- Marshall S.J.** Recent advances in understanding ice sheet dynamics // *Earth and Planet. Sci. Lett.*, 2005, vol. 240, p. 191–204.
- Marshall S.J., Tarasov L., Clarke G.K.C., Peltier W.R.** Glaciological reconstruction of the Laurentide ice sheet: physical processes and modelling challenges // *Can. J. Earth Sci.*, 2000, vol. 37, p. 769–793.
- Näslund J.-O., Jansson P., Fastook J.L. et al.** Detailed spatially distributed geothermal heat-flow data for modeling of basal temperatures and meltwater production beneath the Fennoscandian ice sheet // *Ann. Glaciol.*, 2005, vol. 40, p. 95–101.
- Oerlemans J.** Some basic experiments with a vertically-integrated ice-sheet model // *Tellus*, 1981, vol. 33A, p. 1–11.
- Oerlemans J.** A model of the Antarctic ice sheet // *Nature*, 1982, vol. 297, p. 550–553.
- Paterson W.S.B.** *The physics of glaciers: 3rd ed.* Oxford et al., Elsevier, 1994, 480 p.
- Pattyn F.** A new three-dimensional higher-order thermomechanical ice sheet model: Basic sensitivity, ice stream development, and ice flow across subglacial lakes // *J. Geophys. Res.*, 2003, vol. 108 (B8), 2382, doi: 10.1029/2002JB002329.
- Pattyn F., Huyghe A., de Brabander S., de Smedt B.** Role of transition zones in marine ice sheet dynamics // *J. Geophys. Res.*, 2006, vol. 111, F02004, doi: 10.1029/2005JF000394.
- Peltier W.R.** The impulse response of a Maxwell Earth // *Revs. Geophys. and Space Phys.*, 1974, vol. 12, p. 649–669.
- Peltier W.R.** Dynamics of the ice age Earth // *Adv. Geophys.*, 1982, vol. 24, p. 1–146.
- Pettit E.C., Waddington E.D.** Ice flow at low deviatoric stresses // *J. Glaciol.*, 2003, vol. 49, p. 359–369.
- Philiberth K., Federer B.** On the temperature profile and age profile in the central part of old ice sheets // *J. Glaciol.*, 1971, vol. 10, p. 3–14.
- Rasmussen L.A., Campbell W.J.** Comparison of three contemporary flow laws in a three-dimensional time-dependent glacier model // *J. Glaciol.*, 1973, vol. 12, p. 361–363.
- Ritz C., Rommelaere V., Dumas C.** Modeling the evolution of Antarctic ice sheet over the last 420,000 years: Implications for altitude changes in the Vostok region // *J. Geophys. Res.*, 2001, vol. 106(D23), p. 31943–31964.

- Robin G. de Q.** Ice movement and temperature distribution in glaciers and ice sheets // *J. Glaciol.*, 1955, vol. 2, p. 523–532.
- Robin G. de Q.** Ice cores and climatic change // *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1977, vol. B280, p. 143–168.
- Schmittner A., Yoshimori M., Weaver A.J.** Instability of glacial climate in a model of the Ocean–Atmosphere–Cryosphere System // *Science*, 2002, vol. 295, p. 1489–1493.
- Slater J.G., Jaupard C., Galson D.** The heat flow through oceanic and continental crust and the heat loss of the Earth // *Revs. Geophys. and Space Phys.*, 1980, vol. 18, p. 269–311.
- Shapiro N.M., Ritzwoller M.** Inferring surface heat flux distributions guided by a global seismic model: particular application to Antarctica // *Earth and Planet. Sci. Lett.*, 2004, vol. 223, p. 213–224.
- Shumskiy P.A., Krass M.S.** Mathematical models of ice shelves // *J. Glaciol.*, 1976, vol. 17, p. 419–432.
- Steig E.J.** How well can we parameterise past accumulation rates in polar ice sheets // *Ann. Glaciol.*, 1997, vol. 25, p. 418–422.
- Tarasov L., Peltier W.R.** A high-resolution model of the 100 kyr ice age cycle // *Ibid.*, p. 58–65.
- Tarasov L., Peltier W. R.** Impact of thermomechanical ice sheet coupling on a model of the 100 kyr ice age cycle // *J. Geophys. Res.*, 1999, vol. 104(D8), p. 9517–9545.
- Tarasov L., Peltier W.R.** Greenland glacial history, borehole constraints, and Eemian extent // *J. Geophys. Res.*, 2003, vol. 108(B3), 2143, doi: 10.1029/2001JB001731.
- Thorsteinsson T., Waddington E.D., Fletcher R.C.** Spatial and temporal scales of anisotropic effects in ice-sheet flow // *Ann. Glaciol.*, 2003, vol. 37, p. 40–48.
- Turcotte D.L., Schubert G.** *Geodynamics*. N.Y., John Wiley, 1982, 440 p.
- Van der Veen C.J.** *Fundamentals of Glacier Dynamics*. Rotterdam, A.A. Balkema, 1999, 462 p.
- Verbitsky M., Saltsman B.** Modeling the Antarctic ice sheet // *Ann. Glaciol.*, 1997, vol. 25, p. 259–267.
- Weertman J.** The theory of glacial sliding // *J. Glaciol.*, 1964, vol. 5, p. 287–303.
- Weertman J.** Comparison between measured and theoretical temperature profiles of the Camp Century, Greenland, borehole // *J. Geophys. Res.*, 1968, vol. 73, p. 2691–2700.
- Weertman J.** General theory of water flow at the base of a glacier or ice sheet // *Revs. Geophys. and Space Phys.*, 1972, vol. 10, p. 287–333.
- Zweck C., Huybrechts P.** Modeling of the northern hemisphere ice sheets during the last glacial cycle and glaciological sensitivity // *J. Geophys. Res.*, 2005, vol. 110, D07103, doi: 10.1029/2004JD005489.

*Поступила в редакцию
13 сентября 2006 г.*