

ТАЯНИЕ И РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИЯ АРКТИЧЕСКОГО МОРСКОГО ЛЬДА

П.В. Богородский, А.В. Пнюшков

*Арктический и антарктический НИИ,
199397, С.-Петербург, ул. Беринга, 38, bogorodski@aari.nw.ru*

Выполнено математическое описание процесса таяния морского льда, моделируемого термодинамически равновесной областью смеси жидкой и твердой фаз (двухфазной зоной). Формулировка задачи предполагает уменьшение доли твердой фазы вплоть до ее полного исчезновения. В рамках одномерного подхода и ряда упрощающих положений построены и проанализированы автомодельные решения задачи для различных вариантов нагревания границ. Показана возможность нарастания льда в расплавленной области и получены критерии рекристаллизации. Проведено качественное сравнение результатов с экспериментальными данными.

Морской лед, двухфазная зона, таяние, рекристаллизация

ARCTIC SEA ICE MELTING AND RECRYSTALLIZATION

P.V. Bogorodsky, A.V. Pnyushkov

*Arctic and Antarctic Research Institute,
199397, St. Petersburg, Bering str., 38, bogorodski@aari.nw.ru*

Mathematical description of the sea ice melting is given. The problem statement assumes decreasing of solid fraction simulating an ice of two-phase media up to formation of fully liquid area with moving interface. In the framework of one-dimensional approach and a number of simplifications, the self-similar solutions for different variants of border heating have been derived and analyzed. The criteria of the sea ice layer recrystallization have been obtained. A qualitative comparison of the results with experimental data is presented.

Sea ice, mushy layer, melting, recrystallization

ВВЕДЕНИЕ

При описании термометаморфических процессов в морском льду (внутреннее и поверхностное таяние, общее опреснение и увеличение пористости, формирование вторично-рекристаллизационных льдов и т. п.) возникает необходимость рассмотрения задач фазовых превращений в среде, содержащей незамерзшую жидкость. Ее существенной чертой является наличие области, в которой чистый лед и рассол находятся в состоянии термодинамического равновесия, а фазовые переходы распространяются на всю область и не могут быть локализованы на поверхности, как это делается в классической задаче Стефана. Моделирование теплопереноса в таких средах – довольно сложная нелинейная задача, точные решения ее имеются только для некоторых частных случаев [Полянин и др., 1998]. Движение границы раздела, закон которого определяется из решения задачи, представляет сложность даже для численных методов.

В настоящей работе предлагается использовать вариант модели замерзания в спектре температур [Ентов и др., 1986], предложенный в работе [Богородский, Пнюшков, 2006] для расчета тепло-

массопереноса при льдообразовании. Цель работы – построение относительно простой модели, позволяющей оценить термодинамику процессов фазовых переходов при различных сценариях нагревания. Предлагаемый подход выполнен с максимальным упрощением формулировок для автомодельного процесса теплопереноса, допускающего в определенных пределах аналитическое решение. Считается, что причиной таяния, под которым понимается уменьшение объема твердой фазы льда (увеличение пористости), является поглощение тепла из граничащих с ним сред – воздуха или воды, причем передача тепла от поверхности в толщу льда происходит путем молекулярной теплопроводности. Важная задача радиационного прогрева не рассматривается. Такое предположение вполне адекватно природным условиям таяния ледяного покрова снизу; для таяния сверху оно справедливо лишь с известными оговорками для весеннего периода, когда снежно-ледяная поверхность суха и имеет высокую отражающую способность [Гудкович и др., 1972; Дорошин, Хейсин, 1975]. Поэтому для естественных условий таяния сверху область приложения построенной модели

ограничена его начальным этапом. В работе рассматривается ситуация, когда за счет нагревания сверху часть льда расплавляется полностью. Эти результаты могут оказаться полезными при решении задач инженерной гляциологии (льдотехники), связанных с тепловым разрушением морского льда [Лебедев и др., 2003].

Интерес к поставленной проблеме обусловлен, в первую очередь, беспрецедентным уменьшением ледовитости арктических морей. Заметим, что согласно работе [Rothrock, Zhang, 2005], где обобщены данные натуральных наблюдений и модельных расчетов для Арктического бассейна за вторую половину прошлого века, основными причинами такого уменьшения стали рост температуры воздуха в весенний период и усиление атмосферной циркуляции, способствующей выносу льда на прогретую воду. По оценкам авторов работы [Rothrock, Zhang, 2005], при среднем объеме морского льда за рассматриваемый период $22,5 \cdot 10^3 \text{ км}^3$ эти процессы приводят к ежегодному его сокращению примерно на $0,089 \cdot 10^3 \text{ км}^3$, или 4 % за декаду.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что изначально морской лед представляет собой двухфазную зону – пористую среду, в которой жидкая (рассол) и твердая (чистый лед) фазы сосуществуют в состоянии термодинамического равновесия, так что их температуры T одинаковы и равны температуре фазового перехода, определяемой локальным значением концентрации рассола S :

$$T(z, t) = T_L(S) \equiv T_{eq} - \gamma S(z, t),$$

где $T_L(S)$, T_{eq} – температура замерзания соленой и пресной воды; γ – наклон линии ликвидуса; t – время. Следуя [Ентов и др., 1986; Назинцев, Панов, 2000], считаем двухфазную зону континуумом, теплофизические характеристики которого являются функцией составляющих его фаз:

$$C\rho_m = f_i C_i \rho_i + f_w C_w \rho_w, \quad k_m = f_i k_i + f_w k_w,$$

где f – объемная доля фазы ($f_w = 1 - f_i$ – пористость); C – теплоемкость; ρ – плотность; k – теплопроводность; индексами m, w, i отмечены двухфазная зона, ее жидкая и твердая фазы соответственно.

Будем рассматривать одномерный процесс фазового перехода в полубесконечном слое морского льда, контактирующего с теплым воздухом или водой. Направим ось Z по вертикали вниз, координата z отсчитывается от нагреваемой границы двухфазной зоны. В случае таяния сверху лед располагается в нижней части полупространства ($0 \leq z < \infty$), снизу – в верхней части ($-\infty < z \leq 0$). Пусть морской лед имеет невозмущенную температуру $T_\infty < T_L(S_\infty)$ и соленость S_∞ . Следуя [Feltham, Worster, 2000], считаем, что все теплофизические

характеристики постоянны и не зависят от фазы: $C_i \rho_i = C_w \rho_w = Cr$, $k_i = k_w = k$. В качестве единиц измерения длины и времени выберем h и $h^2 Cr/k$, где h – некоторый линейный размер системы. Безразмерную температуру определим как

$$T^* = \frac{T - T_L(S_\infty)}{T_L(S_\infty) - T_E} = \frac{S - S_\infty}{S_E - S_\infty},$$

где T_E , S_E – эвтектическая температура и соответствующая ей соленость.

Уравнения теплопереноса в морском льду и жидкости неоднократно выводились различными способами. Возьмем их в следующем виде [Feltham, Worster, 2000] (звездочки у безразмерных переменных опущены):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - St \frac{\partial f_w}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$f_w \frac{\partial S}{\partial t} = -(S + Cr) \frac{\partial f_w}{\partial t}; \quad (16)$$

$$T = -S, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$z = h_m: \quad [T]^+ = 0, \quad (4a)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]^+ = 0, \quad (46)$$

$$f_w = 1; \quad (4b)$$

$$z = 0: \quad T = T_b, \quad (5)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow T_\infty, S \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$t = 0: \quad T \rightarrow T_\infty, S \rightarrow 0; \quad (7)$$

$$St = L/c(T_L(S_\infty) - T_E), \quad Cr = (S_i - S_\infty)/(S_\infty - S_E),$$

где L – скрытая теплота фазового перехода; h_m – положение фронта фазового перехода; St – число Стефана; Cr – параметр, характеризующий вариации солености внутри двухфазной области; T_b – температура границы раздела атмосфера–двухфазная зона, символ $[\cdot]^+$ обозначает скачок через границу раздела. Здесь использовано добавочное предположение о малости вертикальной диффузии соли, характерной для водных растворов солей ($D \ll k$), которое вместе с условием термодинамического равновесия сводит классическое условие Стефана, определяющее ее движение, к условию непрерывности потоков тепла. Кроме того, перераспределение диффузии соли только внутри двухфазной области и условие непрерывности температуры (4a) приводят к тому, что $S \equiv 0$ во всей жидкости.

Поскольку в начальный момент h_m находится в нуле, рассматриваемая задача имеет автомодельное решение

$$T = T(\xi), \quad h_m = \alpha\sqrt{t}, \quad \xi = z/\sqrt{t}, \quad (8)$$

где ξ – безразмерная автомодельная переменная; α – положение границы раздела.

Замена переменных (8) в (1) и (3) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно переменной ξ [Полянин и др., 1998]:

$$\alpha < \xi < \infty \quad (-\infty < \xi < -\alpha): \quad -\xi T' = 2T'' + St\xi f_w', \quad (9a)$$

$$f_w T' = (Cr - T)f_w'; \quad (9b)$$

$$0 < \xi < \alpha \quad (-\alpha < \xi < 0): \quad -\xi T = 2T'' \quad (10)$$

(штрихи обозначают дифференцирование по ξ).

Краевые условия имеют вид

$$\xi = \alpha: \quad [T]_+^+ = 0, \quad (11a)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_+^+ = 0; \quad (11b)$$

$$\xi = 0: \quad T = T_b, \quad (12)$$

$$\xi \rightarrow \infty: \quad T \rightarrow T_\infty \quad (\xi \rightarrow -\infty: T = T_\infty). \quad (13)$$

В этом случае уравнение (9б) с учетом (11a) может быть проинтегрировано. Получим

$$f_w = \frac{Cr}{Cr - T}. \quad (14)$$

ТАЯНИЕ

Таяние морского льда начинается с момента, когда его температура, достигнув минимума, начинает повышаться [Зубов, 1945]. При этом в зависимости от величины температуры нагреваемой поверхности T_b возможны два случая (варианта): 1) внутреннего таяния, когда уменьшение твердой фазы происходит без образования полностью расплавленной области ($T_\infty < T_b < 0$), 2) образования расплавленной области двухфазной зоны ($T_b > 0$) толщиной h_m . В случае образования расплавленной зоны на основании экспериментальных наблюдений предполагаем, что ее соленость равна средней солености двухфазной зоны. Система (9), описывающая эволюцию двухфазной зоны, интегрируется с граничными условиями (12), (13) для случая внутреннего таяния и (4a), (6) для случая расплавления льда; граничными условиями уравнения теплопроводности (10) в расплавленной зоне являются (11)–(13).

В предположении о постоянстве физических свойств и их независимости от фазы исследуемая система может быть охарактеризована следующими значениями параметров и коэффициентов [Назинцев, Панов, 2000]: $k = 1,4$ Вт/(м·К), $Cr = 288,066 \cdot 10^4$ Дж/(К·м³), $L = 3,34 \cdot 10^5$ Дж/кг, $\gamma = 0,05236$ °С/‰, $S_\infty = 10$ ‰, $S_i = 0$, $T_E = -33,6$ °С. Отсюда получаем $Cr = 0,02$, $St = 3,33$. На рис. 1 приведены распределения температуры и пористости в двухфазной зоне для обоих вариантов при нагревании сверху, полученные численно при $T_\infty = -0,287$ (–10 °С), $T_b = -0,07$ (–0,75 °С) и $T_\infty = -0,287$, $\alpha = 0,05$. Заметим, что обычная тем-

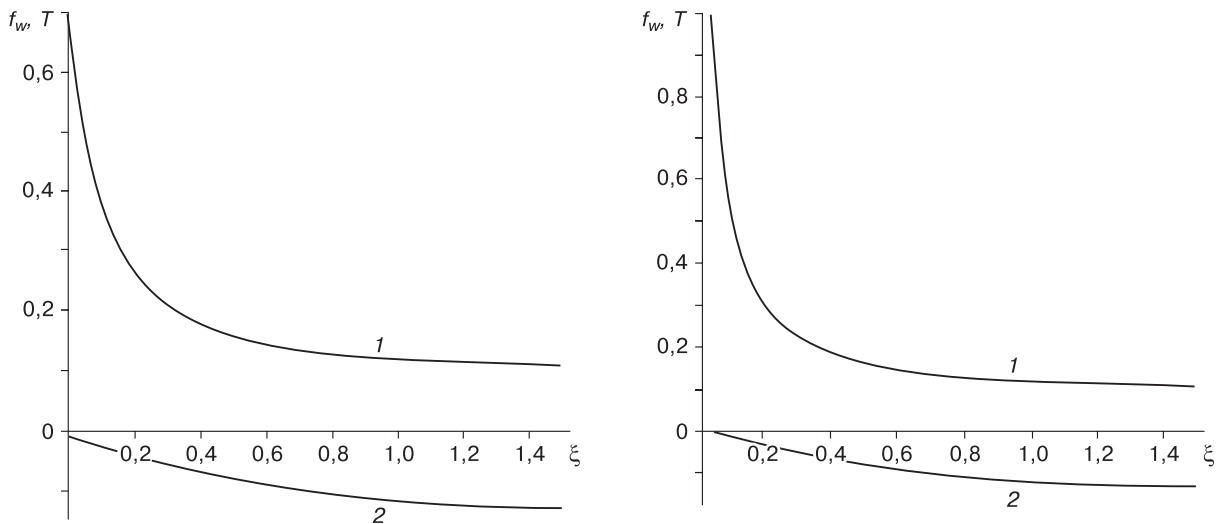


Рис. 1. Распределение пористости (кривые 1) и температуры (кривые 2) в двухфазной зоне при таянии льда сверху, $T_\infty = -0,287$ (–10 °С):

a – вариант 1, $T_b = -0,07$ (–0,75 °С); *б* – вариант 2, $\alpha = 0,05$.

пература воздуха над тающим льдом в Центральной Арктике в среднем мало отличается от нуля, ее типичное значение составляет 0–0,5 °С [Гудкович и др., 1972]. Как следует из рис. 1, профили температуры и пористости в двухфазной зоне, представляющей собой протяженную область фазового перехода морского льда при отрицательной температуре, в обоих случаях сходны. Прогрев сопровождается увеличением пористости верхних слоев. Из-за взаимосвязи термометаморфических преобразований оба профиля нелинейны и существенно меняются с ростом безразмерной автомодельной переменной (толщины льда).

Для расплавленного льда имеется аналитическое решение

$$T = T_b \left(1 - \frac{\operatorname{erfc}(\xi/2)}{\operatorname{erfc}(\alpha/2)} \right), \quad (15)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл ошибок, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$. Зависимость (15) при различных значениях T_b приведена на рис. 2.

Как и при таянии сверху, при таянии снизу возможны два случая. При $T_\infty < T_b < 0$ уменьшение твердой фазы происходит без образования расплавленной области. Этот случай полностью аналогичен уже рассмотренному случаю внутреннего таяния при нагревании сверху. Сходным образом меняются и температура, и фазовый состав льда.

Дальнейшее повышение температуры талой воды подо льдом будет приводить к расплавлению новых слоев льда и, как следствие, к росту толщины расплавленного слоя. Аналогичная ситуация имеет место и при таянии сверху, когда стаивание снега и заполнение талой водой впадин в ледяном покрове приводит к образованию и развитию наледных водоемов (снежниц), глубина которых может достигать 6 м [Зубов, 1945]. В рамках поставленной задачи это соответствует случаю контакта двух полубесконечных слоев: двухфазного и жидкого. Для расчета эволюции такой системы введем невозмущенную температуру в жидкости $T_\infty > 0$:

$$\xi \rightarrow \infty: T \rightarrow T_\infty. \quad (16)$$

Уравнения (9), (10) вновь описывают эволюцию двухфазной и жидкой зон. Граничными условиями для них являются (11) и (13), а условие (12) заменяется на (16). Для упрощения задачи можно предположить, что морской лед имеет большую пористость ($f_w \rightarrow 1$). Это является хорошим приближением для завершающей стадии таяния, когда ледяной покров насыщен водой [Зубов, 1945]. В данном случае система (9) для двухфазной зоны сводится к единственному уравнению

$$-\xi s T' = 2T'', \quad (17)$$

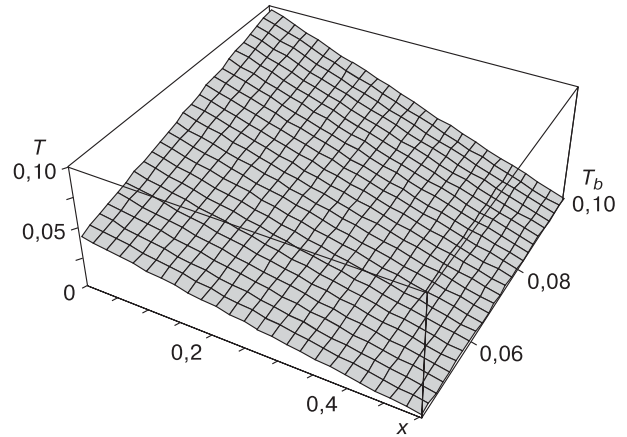


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в расплавленной зоне при таянии сверху при различной температуре нагреваемой поверхности для $\alpha = 0,5$.

решение которого выражается через функцию ошибок:

$$T = T_\infty \left(1 - \frac{\operatorname{erfc}(\xi\sqrt{s}/2)}{\operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{s}/2)} \right). \quad (18)$$

Здесь $s = 1 + St/Cr$. Решение уравнения (10) в этом случае

$$T = T_\infty \left(\frac{\operatorname{erf}(\alpha/2) - \operatorname{erf}(\xi/2)}{1 + \operatorname{erfc}(\alpha/2)} \right). \quad (19)$$

Пористость определяется из соотношений (14), (18). Из уравнений (18), (19) нетрудно найти значения их производных на границе раздела, подстановка которых в условие (46) приводит к трансцендентному уравнению для определения закона движения границы раздела

$$-\frac{\exp(\alpha^2/4)T_\infty}{(1 + \operatorname{erfc}(\alpha/2))} = \frac{\exp(-s\alpha^2/4)\sqrt{s}T_\infty}{\sqrt{\pi}\operatorname{erfc}(\sqrt{s}\alpha/2)}, \quad (20)$$

которое может быть решено численно. Таким образом, если процесс таяния протекает при больших коэффициентах пористости (или при малых значениях температур двухфазной зоны), выражения (18)–(20) полностью определяют решение задачи на завершающей стадии таяния, вплоть до перехода всей твердой фазы в жидкую.

РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

Покажем, что в расплавленной области при некоторых условиях возможно нарастание льда. Известно, что изменения толщины льда в весенне-летний период происходят не только за счет стаивания, но и из-за нарастания льда [Дорониин, Хей-

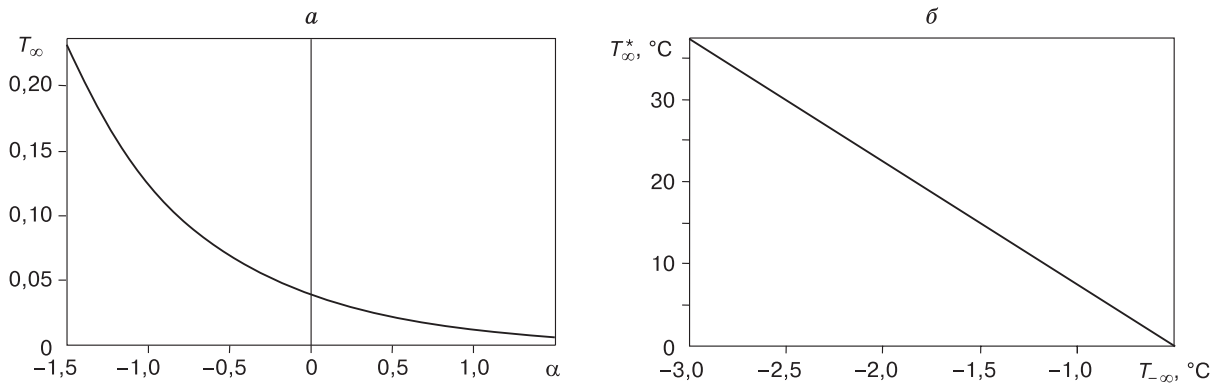


Рис. 3. Взаимосвязь температуры нагреваемой поверхности и положения фронта фазового перехода при таянии снизу (а) и зависимость размерной температуры рекристаллизации от невозмущенной температуры двухфазной зоны (б).

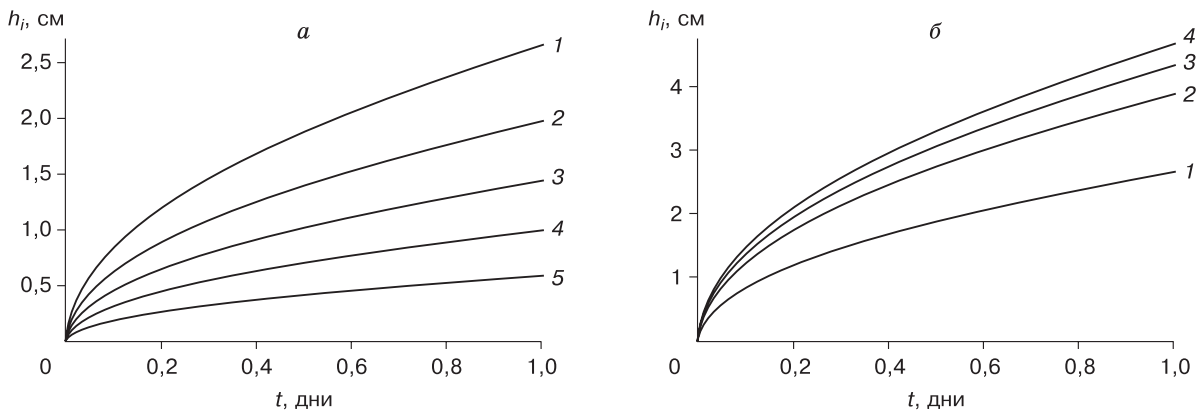


Рис. 4. Суточное нарастание льда для различных значений температур воды и льда: а - $T_{\infty} = -1^{\circ}\text{C}$, 1-5 - $T_{\infty} = 1, 2, 3, 4, 5^{\circ}\text{C}$, б - $T_{\infty} = 1^{\circ}\text{C}$, 1-4 - $T_{\infty} = -1, 2, 3, 4^{\circ}\text{C}$.

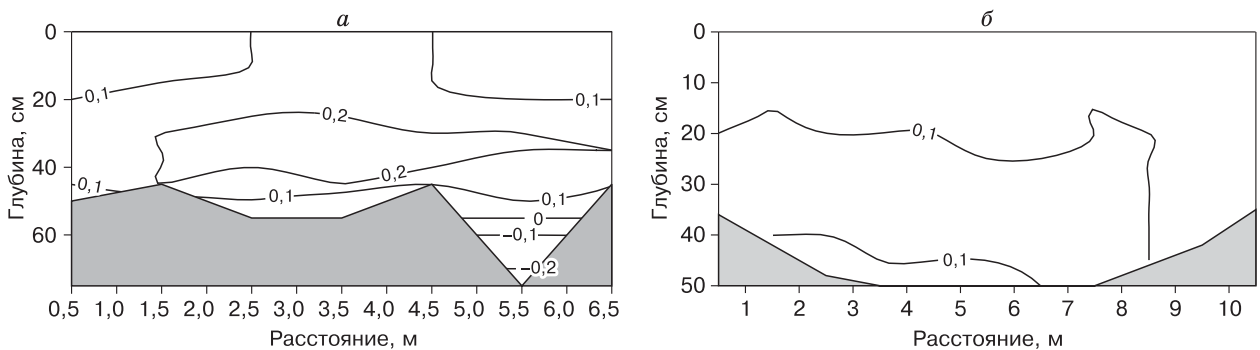


Рис. 5. Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) в слое талой воды в период охлаждения (а) и начала замерзания (б) по данным, полученным авторами в ходе 23-го рейса НЭС "Академик Федоров": а - 5 августа 2005 г.; б - 31 августа 2005 г.

син, 1975]. Это обстоятельство физически понятно: во льду всегда существует запас холода, на ликвидацию которого расходуется тепло, поступающее от нагреваемой поверхности. Повышение температуры воды увеличивает поток тепла и тем самым стимулирует таяние льда, в то время как запас холода в двухфазной зоне препятствует этому. В тех случаях, когда отток тепла от нижней поверхности льда вверх превышает приток тепла из воды, может происходить нарастание льда, даже если сверху он стаивает. Этот процесс, называемый режелационной перекристаллизацией, является наиболее распространенным типом реформирования строения льда, относящегося к процессам термометаморфизма [Тышко и др., 2000]. Образовавшийся при перекристаллизации лед приобретает структуру, отличную от структуры глубинных слоев, и играет важную роль в изменении динамических и термических свойств ледяного покрова [Зубов, 1945; Тышко и др., 2000]. На рис. 3 приведена зависимость фронта фазового перехода при таянии снизу от температуры нагреваемой поверхности. Пересечение кривой с ординатой, соответствующее $\alpha = 0$, дает пороговое значение температуры $T_{\infty} = T_{\infty}^*$, разделяющее области нарастания ($\alpha < 0$) и таяния ($\alpha > 0$) льда. Другими словами, существует резкая граница между обоими фазовыми переходами: при $T_{\infty} < T_{\infty}^*$ реализуется режим рекристаллизации, при $T_{\infty} > T_{\infty}^*$ – плавления. При выполнении условия $f_w \rightarrow 1$ значение T_{∞}^* легко находится из (13):

$$T_{\infty}^* = -\sqrt{sT_{\infty}}. \quad (21)$$

Отсюда для размерных величин при выбранных параметрах системы имеем зависимость $T_{\infty}^* = -14,5 T_{\infty} - 8,1$.

Темпы нарастания рекристаллизационного льда для различных значений невозмущенных температур воды и льда приведены на рис. 4. Интенсивность рекристаллизации определяется конкуренцией встречных потоков тепла к границе раздела жидкой и двухфазной зон, во многом зависящей от накопленного в морском льду запаса холода. Уменьшение потока тепла от расплавленного слоя в процессе осеннего выхолаживания, подтверждаемое данными измерений (рис. 5), создает благоприятные условия для начала процесса рекристаллизации до наступления отрицательных температур воздуха. Естественно, что из-за принятых упрощений фактический прирост льда будет отличаться от полученных оценок. Для многолетних арктических льдов слой такого льда обычно составляет 3–5 см с увеличением до 20–50 см на торосистых участках [Тышко и др., 2000]. Для более адекватного описания процесса необходимо учитывать различие термодинамических коэффициентов фаз, диффузию соли и,

конечно, рассматривать более сложные условия теплообмена на нагреваемой поверхности. Тем не менее результаты расчетов позволяют сделать вывод о чувствительности пороговой температуры к величине температуры в глубине льда нагреваемой поверхности: ее трехкратное уменьшение приводит к почти пятикратному росту темпов льдообразования. Поэтому нарастание многолетних арктических льдов может происходить на их внешних границах задолго до установления отрицательных температур воздуха.

Для расчета максимального прироста льда H_{\max} , следуя [Зубов, 1945], можно предположить, что в отсутствие потока тепла из воды ко льду все тепло, выделяемое при его нарастании, компенсируется потоком на верхней границе. В этом случае величина H_{\max} находится из следующего соотношения [Доронин, Хейсин, 1975]:

$$\ln \frac{H_{\max}}{H_0} = \frac{1}{L} \int_{T_{\infty}}^{T_L(S)} CdT, \quad (22)$$

где H_0 – толщина льда.

Зависимости H_{\max} от температуры льда при $T_L(S) = -1,5^\circ\text{C}$, рассчитанные по формуле (22), представлены на рис. 6. Как следует из рисунка, расчет по формуле (22) дает толщину вновь образующегося льда в десятки сантиметров, что вполне сопоставимо с модельными результатами. Этот процесс обуславливает формирование неоднородностей толщины ледяного покрова до нескольких десятков сантиметров. Можно предположить, что в весенне-летний период, когда площадь и толщина слоев талой воды на льду и под ним велики [Зубов, 1945; Тышко и др., 2000], режелационная

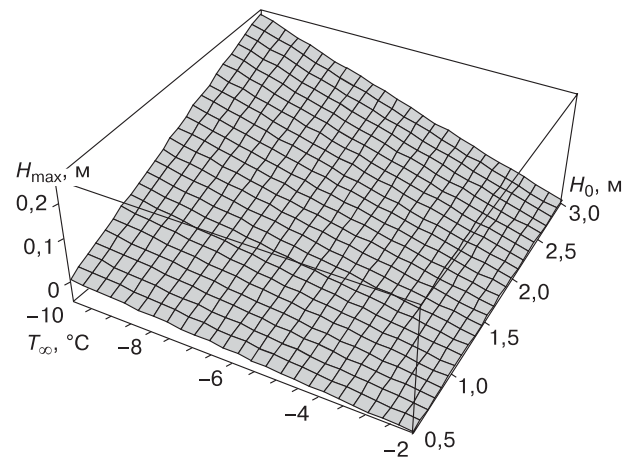


Рис. 6. Величина максимально возможного прироста льда различной толщины при $T_L(S) = -1,5^\circ\text{C}$, рассчитанная по формуле (22) [Доронин, Хейсин, 1975].

перекристаллизация вносит вклад в формирование неравномерностей толщины морского ледяного покрова.

ВЫВОДЫ

Термодинамическая модель льдообразования обобщена на случай таяния льда. В обоих случаях постановка задачи предполагает введение термодинамически равновесной двухфазной зоны, вне которой фазовые переходы не происходят, а фазовый состав известен. Для решения конкретной задачи проводится разбиение пространства на области постоянства f_w и двухфазную зону с заранее неизвестной границей, однако при таянии льда возможно уменьшение доли твердой фазы без образования расплавленной зоны. Несмотря на ряд упрощений, такая модель удовлетворительно описывает различные сценарии фазовых переходов в морском льду, в том числе и возникновение рекристаллизации, а также дает основные количественные характеристики процесса. Показано, что нарастание многолетних арктических льдов может происходить на их внешних границах до установления отрицательных температур воздуха. В условиях весенне-летнего периода, когда площадь и толщина наледных и подледных слоев талой воды велики, этот процесс может иметь важное климатическое значение.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-05-64442, 07-05-13558).

Литература

- Богородский П.В., Пнюшков А.В.** О тепломассопереносе на начальной стадии льдообразования в море // *Океанология*, 2006, т. 46, № 1, с. 21–26.
- Гудкович З.М., Кириллов А.А., Ковалев Е.Г. и др.** Основы методики долгосрочных ледовых прогнозов для арктических морей. Л., Гидрометеиздат, 1972, 348 с.
- Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е.** Морской лед. Л., Гидрометеиздат, 1975, 318 с.
- Ентов В.М., Максимов А.М., Цыпкин Г.Г.** Об образовании двухфазной зоны при кристаллизации смеси в пористой среде // *Докл. АН СССР*, 1986, т. 288, № 3, с. 621–624.
- Зубов Н.Н.** Льды Арктики. М., Изд-во Главсевморпути, 1945, 360 с.
- Лебедев Г.А., Сухоруков К.К., Ковалев С.М.** Термическое разрушение морского льда. СПб., Гидрометеиздат, 2003, 184 с.
- Назинцев Ю.Л., Панов В.В.** Фазовый состав и теплофизические характеристики морского льда. СПб., Гидрометеиздат, 2000, 83 с.
- Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А.** Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М., Факториал, 1998, 368 с.
- Тышко К.П., Черепанов Н.В., Федотов В.И.** Кристаллическое строение морского ледяного покрова. СПб., Гидрометеиздат, 2000, 66 с.
- Rothrock D.A., Zhang J.** Arctic Ocean sea ice volume: what explains its recent depletion? // *J. Geophys. Res.*, 2005, vol. 110, C01002, doi: 10.1029/2004JC002282, 2005.
- Feltham D.L., Worster M.G.** Similarity solutions describing the melting of a mushy layer // *J. Crystal Growth*, 2000, vol. 208, p. 746–756.

*Поступила в редакцию
20 октября 2006 г.*